

تطوير التفكير العددي

كشفت الأبحاث الأخيرة أن للإنسان عدة أدمغة لا دماغاً واحداً فقط ، وقد تم منح جائزة نوبل للبروفيسور روجر سبيري Rogar Sperry على بحث في هذا الموضوع ، ادعى أن مخ الإنسان مقسم إلى حجيرتين (فلقتين) : يمينى ويسرى ، وكل فلقة منهما مسؤولة عن وظائف مختلفة للتفكير .

حسب هذه النظرية فإن المسؤولية عن مهارات التفكير تنقسم بين الحجيرتين (الفلقتين) حيث أن الجهة اليسرى مسؤولة عن الوظائف التالية : (١) المنطق (٢) التفكير اللفظي (٣) القوائم (٤) الأعداد (٥) المتواليات (٦) العلاقة الطردية (٧) التحليل .

والجهة اليمنى مسؤولة عن (١) الإيقاع (٢) الخيال (٣) أحلام اليقظة (٤) اللون (٥) الأبعاد (٦) الإدراك الخاص (٧) إدراك للصورة بكاملها (جشتالت) .

وقد ذهب بروفيسور سبيري (Sperry) وزملاؤه إلى أنه كلما استعمل الإنسان جهتي المخ فإن تطورهما يكون أكبر . فمثلاً وجدوا أن تعلم الموسيقى يساعد على تعلم الرياضيات ، وتعلم الرياضيات يساعد على تعلم الموسيقى ، ووجدوا كذلك أن هناك علاقة مشابهة بين تطوير الإيقاع وتطوير اللغة ، وأن تطوير مصطلحات الأبعاد يساعد على تعلم الرياضيات ، وأن تعلم الرياضيات يساعد على تعلم مصطلحات الأبعاد ، واكتشفوا كذلك أنه كلما كان استعمال الوظائف الفردية أكثر فإن هذا يؤدي إلى تطوير التفكير العام لدى الإنسان .

في هذا السياق نستذكر أناساً موسوعيين مثل ليونارد دفتشي ، بكمينستر بولر وآخرين . ثم استمر بروفيسور عيران زايدل في الثمانينيات في تناول الأبحاث التي بدأها البروفيسور سبيري ، فبيّن أن مجال المهارات التي تقع تحت سيطرة المخ هو مقسّم أكثر بكثير مما اعتقدوا في البداية . لقد بيّن أن لكل حجيرة من حجيرات المخ هناك قدرة كامنة للاعتناء بكل وظائف الدماغ .

بشكل أو بآخر ، وبدون التوقف على علاقة الجزء الدماغي ومسؤوليته عن هذا النوع أو ذاك من أنواع التفكير ، فإن العلماء يعتقدون أنه كلما تم تطوير زوايا أخرى من التفكير ، فإن هذا سيؤدي إلى تطور قدرة التفكير العامة عند الإنسان

إن من أسس التفكير المجرد القدرة على التعميم - أي اعطاء معنى لأشياء نراها بواسطة إيجاد قاعدة (أو قانون) يصوغ المشترك لمجموعة أشياء ، أو إيجاد القانونية التي تتطور حسبها مجموعة أشياء معاً .

وقد عملنا في الجزء الأول من هذه الوحدة على تطوير هذه القدرة بالنسبة للأشكال - أي على تطوير التفكير الشكلي (المرئي).

أما تطوير القدرة على التعميم في المجال العددي الحسابي فإنه يطور القدرة الحسابية عند الشخص الذي يتعلم، وليس هذا فقط بل سيطور قدرته العامة على التعميم.

من هنا سنحاول تطوير قدرة التعميم الحسابية بواسطة معالجة متواليات، وإيجاد القانون الذي تتغير وفقه، وكذلك إيجاد الشواذ في مجموعات أعداد.

طريقة التفكير:-

أن التفكير المتعلق بإكمال الناقص بالاحجيات التالية يضم ثلاث مراحل:

- ١ - التمعن في الأعداد المعطاة في محاولة إيجاد ما إذا كانت بينهما علاقة معينة، وما هي هذه العلاقة؟ وسيكون الاتجاه في الأعداد من اليمين إلى اليسار.
- ٢ - استخلاص الفكرة التي هي أساس الأحجية، وصياغة دقيقة للعلاقة، أو الموضوع، أو القانون، وفحص العلاقة التي صيغت بالنسبة للأعداد المعطاة.
- ٣ - تطبيق القانون، وذلك لإيجاد الأعداد الناقصة.



متواليات عددية - أكمل الناقص

انتبه : في كل المتواليات العددية ستجد اتجاه قراءة المعطيات : من اليمين إلى اليسار لأن الأرقام هندية

نفترض أنه طُلب منك أن تذكر قائمة الأعداد التالية :

٩ ، ٥١٧ ، ١١ ، ١ ، ١٥ ، ٣ ، ١٩ ، ٧

لأول نظرة تبدو هذه القائمة صعبة جدًا .

بالنظرة الثانية ، بعد أن نتمعن مرة أخرى بالأعداد ، نكتشف أنه إذا رتبنا الأعداد حسب قيمتها من الصغير إلى الكبير ، فسنحصل على القائمة التالية :

١٧ ، ١٥ ، ١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١

هل من السهل تذكر الأعداد عندما تكون مرتبة ؟

من السهل تذكر قائمة أعداد إذا وجدنا العلاقة التي تربط بين الأعداد المختلفة في القائمة .

مثلاً : في القائمة «المرتبة» من السهل جداً اكتشاف أن كل عدد هو أكبر من العدد الذي عن يمينه بـ ٢ . لذلك يكفي أن نذكر أن العدد الأول هو ١ ، وأن الفرق بين كل عددين متتاليين هو ٢ . لكي نستطيع أن نكرر الأعداد بسهولة .

إن قائمة الأعداد التي فيها علاقة ثابتة بين كل عددين متتاليين تُسمى متوالية ، وكل عدد من أعداد المتوالية يسمى حدًا .

عندما لا تكون علاقة ثابتة بين الأعداد - لا تكون متوالية .

بعد اكتشاف العلاقة الموجودة بين الحدود المتتالية في قائمة الأعداد ، يمكن التوقع ماذا سيكون الحد التالي في المتوالية والذي يليه وهكذا . في هذه المرحلة يتدخل تفكير استقرائي - واعتماداً على الأمثلة التي فحصناها سنحدد قانوناً عاماً ، ومنه نستنتج ما ينطبق على أمثلة أخرى . وهذه المرحلة تتطلب حذراً كبيراً ، فقبل أن تنتقل إلى معرفة الحد التالي علينا أن نفحص جيداً أن كل أعداد المتوالية المعطاة تنطبق عليها القاعدة التي استخلصناها . عندما تكون المتواليات بسيطة ، من السهل إيجاد قانون المتوالية وإكمالها .

ولكن عندما يكون القانون معقداً أكثر ، فهناك حاجة إلى تفكير عميق لكي نكتشف القانونية ، وسيساعدنا في ذلك التدريب والتمرين ، وسنجد أنه كلما كانت القانونية معقدة أكثر كانت المتعة أكبر ، ونحن نحاول إيجاد هذه القانونية التي تربط بين الحدود المتتالية في المتوالية .

سوف نتعلم هنا كيف سنميز شروط القانونية لحدود متواليات كثيرة - من السهل إلى الصعب .



متواليات حسابية

متواليات حسابية هي متواليات فيها الفرق ثابت بين كل عددين متتاليين في المتوالية.

الأرقام الطبيعية تشكل متوالية حسابية، فيها الفرق الثابت بين كل عددين متتاليين هو ١.

$$١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, \dots$$

خمن ماذا سيكون العدد أو (الحدّ) التالي؟ وهذا الذي بعده؟ تجد بين قوسين تلميحا لقاعدة المتوالية - أضف ١ للعدد، وهكذا تحصل على العدد التالي.

في المتوالية التالية الفرق الثابت هو ٢. أكمل العدد (أو الحدّ) التالي في المتوالية والذي بعده.

$$٢, ٤, ٦, ٨, ١٠, ١٢, ١٤, \dots$$

في المتوالية الآتية الفرق الثابت هو ٣. أكمل العدد (الحدّ) التالي في المتوالية.

$$٢, ٥, ٨, ١١, ١٤, ١٧, ٢٠, ٢٣, \dots$$

في المتوالية الآتية الفرق الثابت هو (١-) (يجب طرح ١). أكمل العدد (الحدّ) التالي في المتوالية.

$$٢٠, ١٩, ١٨, ١٧, ١٦, ١٥, ١٤, \dots$$

في المتوالية الآتية الفرق الثابت هو (٢-) (يجب طرح ٢). أكمل العدد (الحدّ) التالي في المتوالية.

$$٢٠, ١٨, ١٦, ١٤, ١٢, \dots$$

في المتوالية الآتية الفرق الثابت هو -٥، ٥. أكمل العدد (أكمل أيضاً الفرق الثابت بين قوسين).

$$٢, ٥, ١, ٥, ٠, ٥, ٠, ٥, ٠, ٥, ٠, \dots$$



إختبر نفسك

في التمارين ١-٨ متواليات حسابية لأعداد (يجب أن تزيد عددًا ثابتًا للحد، أو تطرح منه حتى تحصل على الحد (العدد) التالي .

هناك قوسان صغيران بين كل حد وحد . سجل بداخلهما القاعدة التي تنقلك من عدد إلى تاليه (أي من الحد إلى الحد الذي يليه) .

أكمل الحدود التالية في المتوالية .

- ١- ٩ ، ١٥ () ، ٢١ () ، ٢٧ () ، ٣٣ () ، ٣٩ () ، ... () ، ... ()
- ٢- ٩ ، ١٤ () ، ١٩ () ، ٢٤ () ، ٢٩ () ، ٣٤ () ، ... () ، ... () ، ... ()
- ٣- ١ ، ١١ () ، ٢١ () ، ٣١ () ، ٤١ () ، ٥١ () ، ... () ، ... () ، ... ()
- ٤- ٨ ، ٦ () ، ٤ () ، ٢ () ، ٠ () ، -٢ () ، ... () ، ... () ، ... ()
- ٥- ١٠٠ ، ٩٨ () ، ٩٦ () ، ٩٤ () ، ٩٢ () ، ٩٠ () ، ... () ، ... () ، ... ()
- ٦- ١٧ ، ٢٠ () ، ٢٣ () ، ٢٦ () ، ٢٩ () ، ٣٢ () ، ... () ، ... () ، ... ()
- ٧- ١٥- ، ١٠- () ، ٥- () ، ٠ () ، ٥ () ، ١٠ () ، ... () ، ... () ، ... ()
- ٨- ١١ ، ١٢ () ، ١٣ () ، ١٤ () ، ١٥ () ، ١٦ () ، ... () ، ... () ، ... ()

في التمارين ٩-١١ متواليات لأعداد فيها القاعدة - التي تعين الانتقال من حد إلى آخر - مختلفة قليلاً . بين كل حد وآخر هناك قوسان ، سجل بداخلهما القاعدة التي تنقلك من حد إلى الآخر الذي يليه .

تلميح : انتبه للفرق الثابت بين الحدود المتتالية .

أكمل الحدود التالية في المتوالية .

- ٩- ٣ ، ٤ () ، ٦ () ، ٩ () ، ١٣ () ، ١٨ () ، ... () ، ... () ، ... ()
- ١٠- ١ ، ١١ () ، ٢٠ () ، ٢٨ () ، ٣٥ () ، ٤١ () ، ... () ، ... () ، ... ()

١١- ١٥، ٢٥^()، ٢٦^()، ٢٦^()، ٣٧^()، ٤٧^()، ...^()، ...^()، ...^()

١٢- ٥، ٧^()، ٤^()، ٦^()، ٣^()، ٥^()، ...^()، ...^()، ...^()

متواليات هندسية، متواليات مدمجة، ومتوالية فيبونتشي

المتواليات الهندسية هي متواليات فيها حاصلة ثابتة بين كل حدين متتاليين .

المتوالية التي فيها الحاصلة الثابتة هي ٢ ، يجب أن نضرب بـ ٢ عددًا معينًا حتى نحصل على العدد الذي يليه في المتوالية .

مثال : ينقسم الميكروب إلى قسمين في كل ثانية . هذا يعني أن عدد الميكروبات (الجراثيم) في كل ثانية هو ضعف عددها بالثانية السابقة ، في الثانية . (صفر) هنالك ميكروب واحد . في الثانية ١ يوجد ميكروبان (نضرب ٢) . في الثانية ٢ توجد ٤ ميكروبات (مرة أخرى نضرب في ٢) ، في الثانية ٣ توجد ٨ ميكروبات وهكذا .

أكتب متوالية تصف عدد الميكروبات في كل ثانية .

(لكي نمنع الالتباس مع إشارة النقطة العشرية (.) سنشير للنضرب بعلامة (x) وللقسمة بعلامة (/)

١, ٢ (٢x), ٤ (٢x), ٨ (٢x), ١٦ (٢x), ٣٢ (٢x), ٦٤ (٢x), ١٢٨ (٢x), ... , ... , ... , ...

خمن ماذا سيكون الحد التالي وهذا الذي يليه ، وما هو عدد الميكروبات بعد مرور ثماني ثوانٍ؟ تسع ثوانٍ؟

١, ٣ (٣x), ٩ (٣x), ٢٧ (٣x), ٨١ (٣x), ٢٤٣ (٣x), ... (٣x), ... (٣x), ... (٣x), ...

خمن ماذا سيكون الحد التالي؟ والحد الذي يليه؟

القاعدة بالمتوالية الآتية : لكي نحصل على الحد التالي يجب أن نضرب الحد الأخير ٢ وأن نضيف لحاصل الضرب ١ . أكمل الحد التالي في المتوالية ، وكذلك الحد الذي يليه .

٢, ٥ (١+٢x), ١١ (١+٢x), ٢٣ (١+٢x), ٤٧ (١+٢x), ٩٥ (١+٢x), ... (١), ... (١), ... (١), ...

المتوالية الآتية هي متوالية مدمجة . يمكن النظر إليها بطريقتين :

أعدادها تحقق قوانين المتوالية الهندسية وكذلك قوانين المتوالية الحسابية على التوالي :

الأعداد المفردة نضربها بـ ٢ ، ولكن الأعداد الزوجية نضيف لها ٣ . أكمل العدد التالي في المتوالية .

٢, ٤ (٢x), ٧ (٣+), ١٤ (٢x), ١٧ (٣+), ٣٤ (٢x), ٣٧ (٣+), ٧٤ (٢x), ... (٣+), ... (٢x), ...



إذا نظرنا فقط إلى الأعداد المفردة، أو فقط إلى الأعداد الزوجية، وسجلنا الفروق بين الحدود المتتالية فإننا سنحصل على متواليات كنا قد عرفناها سابقاً.

$$٢, ٧^{(٥+)}, ١٧^{(١٠+)}, ٣٧^{(٢٠+)}, \dots, \dots^{(٤٠+)}, \dots^{(١٠٠+)}, \dots$$

متوالية الفروق هي نفسها المتوالية الهندسية!

$$٤, ١٤^{(١٠+)}, ٣٤^{(٢٠+)}, ٧٤^{(٤٠+)}, \dots, \dots^{(١٠٠+)}, \dots^{(١٠٠+)}, \dots$$

متوالية فيوننتشي هي المتوالية التي فيها كل حد هو مجموع الحدين السابقين. (ابتداءً من الحد الثالث).

أمثلة :

$$١, ٢, ٣^{(٣+١)}, ٥^{(٣+٢)}, ٨^{(٥+٣)}, ١٣^{(٨+٥)}, ٢١^{(١٣+٨)}, \dots^{(٢١)}, \dots^{(٣٤)}, \dots^{(٥٥)}, \dots$$

$$٠, ١, ١^{(١+١)}, ١^{(١+١)}, ٢^{(١+١)}, ٣^{(٢+١)}, ٥^{(٣+٢)}, \dots^{(٥)}, \dots^{(٨)}, \dots^{(١٣)}, \dots$$



إختبر نفسك

تحتوي التمارين ١-١٢ على متواليات لأعداد مشابهة لمتواليات سبق ودرسناها .

هناك قوسان بين كل حد وآخر . سجل بداخلهما القاعدة التي تنقلك من حد معين إلى الحد الذي يليه . أكمل الحدود التالية في المتوالية .

- ١ . ٥ , ٦ () , ٨ () , ١١ () , ١٥ () , ٢٠ () , ٢٦ () , ... () , ... ()
- ٢ . ٥ , ٦ () , ٨ () , ٩ () , ١١ () , ١٢ () , ١٤ () , ... () , ... ()
- ٣ . ٤ , ٦ () , ٥ () , ٧ () , ٦ () , ٨ () , ٧ () , ... () , ... ()
- ٤ . ٥ , ٢ () , ٧ () , ٩ () , ١٦ () , ٢٥ () , ٤١ () , ... () , ... ()
- ٥ . ٢ , ٦ () , ١٠ () , ١٤ () , ١٨ () , ٢٢ () , ٢٦ () , ... () , ... ()
- ٦ . ١ , ٦ () , ٧ () , ١٧ () , ١٨ () , ٣٣ () , ٣٤ () , ... () , ... ()
- ٧ . ١ , ١٠ () , ١٠٠ () , ١٠٠٠ () , ١٠٠٠٠ () , ... () , ... ()
- ٨ . ١١ , ١٢ () , ١٣ () , ١٤ () , ١٥ () , ١٦ () , ١٧ () , ... () , ... ()
- ٩ . ٦ , ٧ () , ٩ () , ١٢ () , ١٦ () , ٢١ () , ... () , ... ()
- ١٠ . ٣٢ , ٢٧ () , ٢٩ () , ٢٤ () , ٢٦ () , ٢١ () , ... () , ... ()
- ١١ . ١ , ٣ () , ٤ () , ١٢ () , ١٣ () , ٣٩ () , ٤٠ () , ... () , ... ()
- ١٢ . ٢٤ , ٣٦ () , ١٨ () , ٢٠ () , ١٠ () , ١٢ () , ٦ () , ... () , ... ()



متواليات إضافية

من الصعب - أحيانا - إيجاد القاعدة التي تربط حدين في المتوالية، حتى لنلاحظ أنه في الواقع هنالك متواليتان، وأن حدود المتوالية الواحدة تظهر بالتناوب مع حدود المتوالية الأخرى: مثال، إليك هذه المتوالية:

$$5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, \dots$$

الأعداد المفردة في المتوالية تحتها خط.

هيا بنا نتمعن في الأعداد المفردة بهذه المتوالية:

$$5, (2+), 7, (3+), 11, (4+), \dots, (), (), \dots$$

من السهل أن نلاحظ أن الزيادة من حد إلى آخر كبرت ب ١ (في البداية كانت الزيادة ٢، بعدها ٣، ٤ وهكذا).

هيا بنا نتمعن في الأعداد الزوجية بهذه المتوالية:

$$6, (2+), 8, (3+), 11, (4+), \dots, (), (), \dots$$

من السهل ملاحظة أن الزيادة من حد إلى آخر كبرت ب ١. (في البداية الزيادة كانت ٢، وبعدها ٣، ٤ وهكذا).

الأعداد الناقصة هي: ١٥، ١٩، ٢٠، ٢٥، ٢٦.

ما هي القاعدة في المتوالية التالية؟

$$1, (4), 9, (16), 25, (36), 49, \dots, \dots, \dots$$

هذه متوالية تربيعية (الرفع للقوة ٢) لأعداد طبيعية.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, \dots, \dots$$

انتبه! في المتوالية أعلاه كان الفرق بين الحدود المتتالية يشكل متوالية حسابية فيها الحد الأول هو ٣، الفرق فيها ٢.

الحدود الناقصة هي: $28 = 64, 29 = 81, 100 = 10$



وما هي القاعدة في المتوالية الآتية؟

٢، ٤، ١٦، ٢٥٦، ...

في هذه المتوالية كل حد هو تربيع الحد السابق له : ليس للحد الأول حد سابق له (أي لا يسبقه عدد).

٢، ٢، ٤، ١٦، ٢٥٦، ...

الحد الناقص هو $256 = 16^2$

وما هي القاعدة في المتوالية الآتية؟

٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ...

يمكن الحصول على هذه المتوالية عندما نطرح ١ من المتوالية التريعية للأعداد الطبيعية.

الحد الناقص هو $1 - 16 = 15$



إختبر نفسك

هنالك قوسان بين كل حد وآخر . سجل بداخلهما القاعدة التي تنقلك من حد معين إلى الحد الذي يأتي بعده .

أكمل الحدود التالية في المتوالية :

- ١- ٨ ، ١٠^() ، ١٤^() ، ١٨^() ، ...^() ، ٣٤^() ، ٥٠^() ، ٦٦^() ، ...^()
- ٢- ٨ ، ١٢^() ، ١٦^() ، ٢٤^() ، ٣٨^() ، ٣٢^() ، ...^() ، ...^() ، ...^()
- ٣- ٦ ، ٩^() ، ١٨^() ، ٣١^() ، ٤٣^() ، ٤٥^() ، ...^() ، ...^() ، ...^()
- ٤- ٣ ، ٥^() ، ٨^() ، ١٣^() ، ٢٢^() ، ٣٩^() ، ...^() ، ...^()
- ٥- ٢٥ ، ٢٠^() ، ١٥^() ، ١٠^() ، ...^() ، ...^() ، ...^() ، ...^()
- ٦- ٨ ، ١٢^() ، ١٠^() ، ...^() ، ...^() ، ...^() ، ...^() ، ...^() ، ٧ - ...^() ، ٨^()
- ٧- ... ، ٨ ، ١١^() ، ١٥^() ، ٢٠^() ، ٢٦^() ، ...^() ، ...^() ، ...^()
- ٨- ٥ ، ٧^() ، ...^() ، ١٧^() ، ٢٥^() ، ...^() ، ...^()
- ٩- ٢١ ، ١٧^() ، ١٣^() ، ٩^() ، ...^() ، ...^() ، ...^()
- ١٠- ١ ، ٥^() ، ١٣^() ، ٢٥^() ، ٤٥^() ، ...^() ، ...^() ، ...^()
- ١١- ٢ ، ٦^() ، ١٨^() ، ٥٤^() ، ...^() ، ...^()
- ١٢- ... ، ٤^() ، ٩^() ، ١٦^() ، ٢٥^() ، ...^() ، ...^() ، ...^()
- ١٣- ٦ ، ١١^() ، ٢١^() ، ٤١^() ، ٨١^() ، ١٦١^() ، ...^()
- ١٤- ... ، ٢^() ، ١٨^() ، ٤^() ، ١٥^() ، ٦^() ، ١٢^() ، ...^() ، ...^()
- ١٥- ... ، ٨^() ، ٢٤^() ، ١٢^() ، ...^() ، ١٨^() ، ٥٤^() ، ٢٧^() ، ...^()



إمتحان

التمارين ١-١٤ هي متواليات عددية .

هناك قوسان بين كل حد وآخر في المتوالية . سجل بداخلهما القاعدة التي تنقلك من حد معين إلى الحد الذي يأتي بعده .

أكمل الحدود التالية في المتوالية :

- ١- $4, 6^{()}, 9^{()}, 13^{()}, 18^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٢- $19, 24^{()}, 29^{()}, 34^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٣- $\dots, 6^{()}, 4^{()}, 2^{()}, 0^{()}, -2^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٤- $1, 3^{()}, 5^{()}, 7^{()}, 9^{()}, 11^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٥- $\dots, 3^{()}, 4^{()}, 6^{()}, 9^{()}, 13^{()}, 18^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٦- $17, 3^{()}, 23^{()}, 3^{()}, 29^{()}, 3^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٧- $1, 3^{()}, 9^{()}, 27^{()}, 81^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٨- $1, 2^{()}, 4^{()}, 8^{()}, 16^{()}, 32^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ٩- $2, 1^{()}, 5^{()}, 25^{()}, 125^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ١٠- $\dots, 2^{()}, 5^{()}, 14^{()}, 41^{()}, 122^{()}, 365^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ١١- $1, -11^{()}, -20^{()}, -28^{()}, -35^{()}, -41^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ١٢- $1, 3^{()}, 4^{()}, 7^{()}, 11^{()}, 18^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ١٣- $2, 5^{()}, 10^{()}, 17^{()}, 26^{()}, 37^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$
- ١٤- $10, 12^{()}, 14^{()}, 17^{()}, 20^{()}, 24^{()}, 28^{()}, \dots, \dots^{()}, \dots^{()}, \dots^{()}$



متواليات عددية - إيجاد الناقص بالمتوالية

متواليات عددية في صيغة شكلية

امثلة

في كل سؤال من الأسئلة التالية هناك متوالية شكلية ، وكنا قد ذكرنا سابقاً أن المتوالية هي مجموعة مركبات تتغير حسب قانون معين أو تحقق قانوناً معيناً .

في تمارين الدومينو نعتبر البسط متوالية عددية ، ونعتبر المقام كذلك متوالية عددية ، ولكن ليس ضرورياً أن تكون هاتان المتواليتان من نفس النوع .

(؟) يشير لعدد ناقص - علينا أن نسجل بجانب كل (؟) ما هو

؟	٨	٦	٤	٢
؟	٦٤	٣٦	١٦	٤

العدد حسب القاعدة التي وجدتها .

١- دومينو ١

في السطر العلوي متوالية حسابية

في السطر الأسفل - تربيع الأعداد التي تظهر في السطر الأول .

٢- دومينو ٢

؟	٤٨	٢٤	١٢	٦
١٧	؟	٥	٣	٢

في السطر العلوي متوالية هندسية

في السطر الأسفل - الفرق يشكل متوالية حسابية .

٣- دومينو ٣

؟	٨	١١	٤	٧
؟	؟	٤	٣	٣

في السطر العلوي الفرق على التوالي : - ٣ ، + ٧

في السطر الأسفل - الفرق على التوالي : ٠ ، + ١

٤- في هذا التمرين كل شكل مكون من أعداد بينها علاقة

عددية . إذا رمزنا لهما ب - a ، b ، c فستكون القاعدة مصوغة بشكل : $a/2 + b = c$

	٧٨		٦٦		٤٢		a
؟	٨	٤٠	٧	٢٧	٦	c	b

٥- هذا التمرين هو مثال ممتاز لقضايا

فيها قوانين استقرائية . إذا رمزنا برموز

كما هو الأمر في الشكل الايمن ، فإنه يمكننا أن نكتب معادلة بحيث تناسب الشكل الأول والثاني من اليمين $d = (a + b) - c$. ولكن هذا القانون لا يمكن تطبيقه على الشكل الثالث . القانون الذي

ينطبق على الأشكال

الثلاثة (المتتالية) هو

$$a * b / c = d$$

				
---	---	---	---	---

* التمارين في هذه الصفحة صعبة !



متواليات عددية - إيجاد الناقص في المتوالية

اوراق عمل

في كل سؤال من الأسئلة هناك متوالية تحتوي على أشكال تتغير حسب قاعدة أو قانون معين (مثلاً: القاعدة يمكن أن تكون على شكل معادلة). جد هذه القاعدة.
(؟) يشير إلى العدد الناقص. سجل بجانب (؟) ما هو هذا العدد حسب القاعدة التي وجدتها.

١. دومينو ١

١
١

٢
٤

٣
٩

٤
١٦

؟
؟
٢. دومينو ٢

٦
٢

١٢
٤

٢٤
١٦

٤٨
؟

؟
؟
٣. دومينو ٣

٢
٣

٤
٧

؟
؟

١١
٢١

١٦
٣١
٤. دومينو ٤

٨
٣

٥
١٠

١٢
٧

٩
؟

؟
؟
٥.

٤٢
٦
١٢

٦٦
١١
١١

٧٢
٨
؟
٦.

٩
٥
٣

٨
٤
٥

٧
؟
٢
٧.

٧
١٩
٩

٩
؟
٦

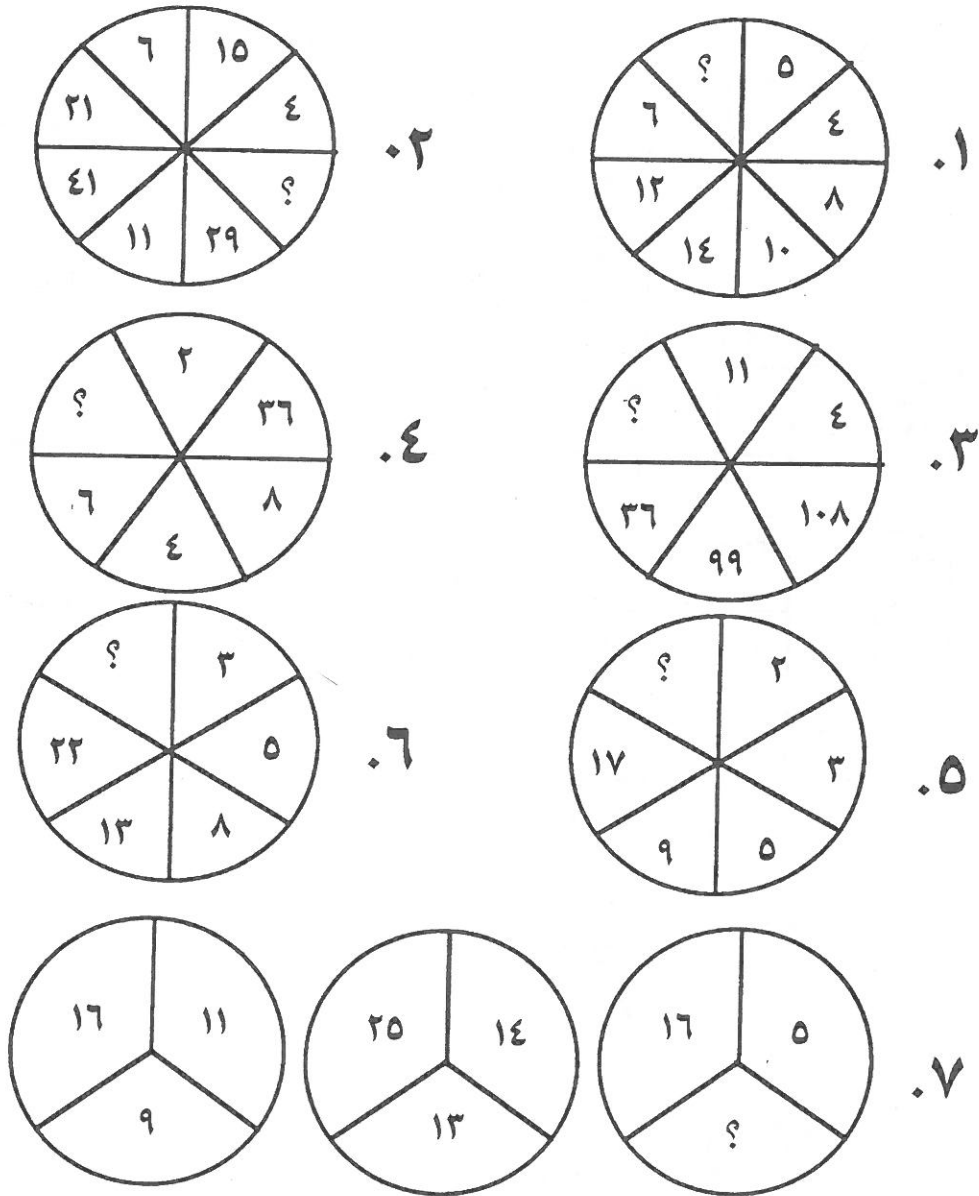
٥
٢٨
١٢

* التمارين في هذه الصفحة صعبة!



متواليات عددية - إيجاد الناقص في المتوالية

في كل سؤال من الأسئلة التالية هناك متوالية تحتوي على أشكال تتغير حسب قاعدة أو قانون معين (مثلاً: القاعدة يمكن أن تكون على شكل معادلة). جد هذه القاعدة.
(?) يشير إلى العدد الناقص. سجل بجانب (?) ما هو هذا العدد حسب القاعدة التي وجدتها.



* التمارين في هذه الصفحة صعبة!



متواليات عددية - إيجاد الحد الشاذ

في الأحجيات الواردة في الصفحات الآتية هناك متواليات عددية «فاسدة» .
وهناك أيضاً مجموعة المركبات العددية المرتبة والمنظمة بصورة معينة أو حسب قاعدة ما أو مبدأ معين .

لقد أقحم إلى هذه المجموعة عدد واحد يختلف عن سائر الأعداد الموجودة فيها، إنه لا يخضع للمبدأ أو النظام أو قانونية المجموعة . وعلينا اختيار العدد الشاذ، ذلك الذي لا يعتبر حداً في المتوالية .

إن المبدأ الذي يقوم عليه حل هذه الأحجيات هو إيجاد التشابه والاختلاف (المؤتلف والمختلف) بين الأعداد المعطاة .

من المفضل معالجة موضوع المتواليات الذي سبق وشرحناه في الصفحات السابقة، وذلك قبل القيام بمعالجة موضوع إيجاد الشاذ .

لكي نختار العدد الشاذ يجب أن :

- (١) نتمعن في المتوالية، ونحاول إيجاد المنطق الذي تقوم عليه .
- (٢) نصوغ القاعدة أو العلاقة أو المبدأ، ونفحص ما إذا كانت القاعدة التي وجدت تنطبق على جميع حدود المتوالية، باستثناء الحد الشاذ .
- (٣) تطبيق القاعدة، وإيجاد العدد الذي «يُفسد السطر» عن طريق الاستبعاد .

إن القانون أو المبدأ الذي تقوم عليه المتوالية يمكن أن يعتمد على :-

- (١) إن جميع الأعداد (باستثناء واحد منها) تكون متوالية، وهي تعتمد على وجود قانونية معينة بين حدودها مثلاً: وجود فرق ثابت بين الحدود المتتالية، أو حاصلة ثابتة للأعداد المتتالية، أو وجود صفتين معاً ذكرتا سابقاً، أو أن حداً معيناً هو مجموع الحدود السابقة، وهكذا .
- (٢) جميع الأعداد، باستثناء واحد، لها صفات حسابية معينة نحو: جميعها زوجية أو فردية، جميعها تقبل القسمة على عدد معين، جميعها أعداد أولية إلخ . . .

تظهر جميع المركبات في السطر، ويجب أن نحاول إيجاد الجزء الذي لا يحقق قانونية السطر، ومع ذلك علينا دائماً أن نعلل - باختصار - أسباب اختيار الجزء الشاذ .

بما أن التفكير المطلوب هنا هو استقرائي لذا فإننا نقوم بصياغة قانون معتمدين على الحالات المعروفة لنا، وعلى



أساسه نحاول أن نقرر ما هو الجزء الذي يُفسد السطر . يجب الحذر من إمكانية وجود تعميم آخر قد ينطبق هو كذلك على الحالات القليلة المعروفة لنا .

في الصفحات الآتية هناك أوراق عمل ، ولكل ورقة عمل سنجد ورقة حلول ممكنة في كراسة الحلول .

متواليات عددية - إيجاد الشاذ

اوراق عمل

في كل سطر من الأسطر التالية هناك عدد واحد «يُفسد السطر»، يعني أنه يخل بقاعدة المتوالية، وإذا أخرجناه من المتوالية تكون القاعدة واضحة!

يجب أن نحيط هذا العدد بدائرة .

مثال:

٩ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢

الرقم ٩ يُفسد السطر، ويجب إحاطته بدائرة - فلو لا هذا العدد لكانت لدينا متوالية حسابية، فيها الفرق الثابت بين أعدادها هو ٢

١ -	٨	١٠	١٢	١١	١٤
٢ -	٢٥	٢٠	١٥	١٢	١٠
٣ -	٦٥	٦٠	٤٥	٣٠	١٥
٤ -	٣	٤	٦	٩	١٢
٥ -	٨١	٥٥	٢٧	٩	٣
٦ -	٨	١٥	١٨	٢٢	٢٩
٧ -	١٩	١٥	١٠	٦	٣
٨ -	٣٦,٨	١٨,٤	٩,٢	٦,٩	٤,٦
٩ -	١٢,٥	١١,٢	١٠,١	٩,٩	٨,٦
١٠ -	٤٨	١٢	٨	٤	٢
١١ -	٦٥٦١	٣٣٣١	٨١	٩	٣
١٢ -	٢,٧٥	١,٧٥	١,٥	١	٠,٥
١٣ -	٣	٦	٨	١٣	١٨



متواليات عددية - إيجاد الشاذ

في كل سؤال من الأسئلة التالية عدد شاذ «يُفسد السطر»، يعني أنه يعيق القاعدة التي توحد سائر الأعداد في السطر.

أحط هذا العدد

مثال: ٩ ٢٥ ٣٦ ٧٨ ١٤٤

الرقم ٧٨ يُفسد السطر، ويجب إحاطته، ذلك لأن - سائر الأرقام هي أرقام تربيعية (تربيع أعداد طبيعية).

١- ٨٣٧	٦١٢	٣٤٢	٥٤٩	٤٢٢
٢- ٢٥	٢٠	١٨	١٢	١٠
٣- ٧	٦	٥	٣	١٧
٤- ٣	٦	٩	١٢-	١٥
٥- ٦٤	٥٥	٢٧	٨	١
٦- ١٤٤	١٩٧	٢٥٦	٣٦١	١
٧- ٠.٩٠٤	٠.١٢١	٠.٠١	٠.١١	٠.٩٠١
٨- ٢٥	٧٥	٩	٣٧٠	٥
٩- ٧٣٨	١١٢	٣٦٣٦	٧٢	٩١٨
١٠- ٣٨	١٢٣	٦	٧٢	٩
١١- ٤٨	١٦	٨	٦٤	٣٢
١٢- ٤٨	١٢٣٤	٤٥٩٦	٢٠	٣٢

في كل سطر من السطور التالية هناك خمس مجموعات من الأعداد، ولكن مجموعة واحدة هي الشاذة. هذا يعني أن لأربع المجموعات الأخرى هناك قاسم مشترك أو قاعدة معينة، بينما المجموعة الشاذة هي المختلفة. أحط هذه المجموعة بدائرة:

مثال:

٣-٢-١ ٢٦-٢٥-٢٤ ١٤-٩-٧ ٤-٣-٢ ٣٠-٢٠-٢٥

المجموعة ٣٠-٢٠-٢٥ تُفسد السطر، ويجب إحاطتها - ذلك لأن سائر المجموعات جاءت الأعداد فيها مرتبة من اليمين إلى اليسار بترتيب تصاعدي. في هذه المجموعة العدد الأوسط هو الأصغر.

١٣- ٧-٢-٥	٦-٤-١	٥-٤-١	٣-٢-١	١٤-١٠-٤
١٤- ٨-٧-٥	٦-٥-٣	٣-٢-١	٧-٦-٤	٤-٣-١
١٥- ٥٢١-١٢٥	٣٧-٧٣	٥٨-٨٥	١١-١٠	٨٤-٤٨
١٦- ٢٥-٥	١٦٩-١٣	٢٥٦-١٦	٨-٤	١٦-٤
١٧- ٢٠-٢	٧٠-٧	٥٠-٥	١٠٠-١	٤٠-٤



تمرين ملخص إبداعي

ينقسم التلاميذ إلى أزواج أو إلى مجموعات، كل مجموعة من ثلاثة تلاميذ. وعلى كل تلميذ أن يعدّ إمتحانا لزميله (أو لزميله).

الامتحان يتضمن عشرة تمارين تحتوي على إكمال الأعداد الناقصة في المتوالية، يجب أن تكون المتواليات من أنواع مختلفة.

ويتضمن تمرينين فيهما إكمال الأعداد الناقصة في مبنى من الأشكال (متوالية شكلية).

والامتحان فيه تمرينان، المطلوب فيهما استخراج العدد الشاذ من بين مجموعة أعداد.

وفيه تمرينان آخران، المطلوب فيهما إيجاد مجموعة من الأعداد الشاذة من بين مجموعات من الأعداد.