

חשיבה דדוקטיבית

שיעור 8: טענות החלטיות

אנו עוברים לעיסוק יותר שיטתי במיעונים שנתקלו בהם עד כה. בשיעור זה נעסוק בסוג מסוים של טענות המופיעות בסוג מסוים של מיעונים. אלו הן **טענות החלטיות**. ישנן ארבעה צורות תקינות של טענות החלטיות.

בטיעונים מהסוג ג', ד', ה', ו', ז', שבהם עסקנו בשיעור 3, מופיעות בהקדמות ובמסקנה טענות מסוג: "כל בני האדם הם בעלי ראש", "שום בן אדם אינו בעל ראש", "יש בני אדם בעלי ראש", "יש בני אדם חסרי ראש". טענות אלו קרויות **טענות החלטיות**.

ישנן **ארבעה צורות תקינות של טענות החלטיות** המוצגות בטבלה הבאה:

בינוי	דוגמה	צורה
א. טענה חיובית כוללת:	כל הסקוטים קמצנים	כל A הוא B
ב. טענה שלילית כוללת:	שום סקוטי אינו קמצן	שום A אינו B
ג. טענה חיובית חלקית:	סקוטים אחדים הם קמצנים	A-ים אחדים הם B
ד. טענה שלילית חלקית:	סקוטים אחדים אינם קמצנים	A-ים אחדים אינם B

המלים: "כל", "שום", "אחדים" נקראות בשם **כמתים** (נגזר מ"כמות").
המלים: "הם", "הוא" נקראות **אוגדים** חיוביים. "איננו", "אינם" - אוגדים שליליים (נגזר מ"לאגד" ופירושו לאחד או לחבר).

בכל הטענות ההחלטיות A הוא הנושא ו-B הוא הנשוא.

- יש צורך לברר אם המושגים "נושא" ו"נשוא" נהירים לתלמידים. אם לא - כדאי לבסס אותם.
- יש לשים לב לכך שניתן לנסח טענה החלטית מסוג א' גם כך: "כל סקוטי הוא קמצן", טענה מסוג ב' ניתן לנסח: "אין סקוטים קמצנים", "סקוטים אינם קמצנים", "לא היה מעולם סקוטי קמצן". טענה מסוג ג': "יש סקוטים קמצנים" וטענה מסוג ד': "יש סקוטים שאינם קמצנים". טענות ג' ו-ד' ניתנות לניסוח גם כך: "לפחות סקוטי אחד הוא קמצן" או - "לפחות סקוטי אחד אינו קמצן".



כל A הוא B	ניסוחים שקולים למענה החלטית א':	<u>דוגמאות:</u>
כל ה-A הם B		כל הכלבים הם חיות. כל הסינים מלוכסני עיניים
כל A שנבחר חייב להיות B		ל
A הם אחדים הם B		ה
אם משהו הוא A, הוא גם B		ש
רק B הם A		ל
כל מי שאינו B אינו A		י
אין A שאינו B		ם
ניסוחים שקולים למענה החלטית ב':	<u>דוגמאות:</u>	
אף A אינו B		אף סקוטי אינו קמזן

ישנם ניסוחים אחרים לטענות ההחלטיות.

להלן שישה ניסוחים, ציין ליד כל אחד מהם לאיזו צורה תקנית של טענה החלטית (מתוך 4 הצורות התקניות שהוצגו בעמוד הקודם) הוא מתאים.

(ראשית, אל תסתכל בתשובות הניתנות בסוף ונסה לענות בעצמך ורק אחר־כך השווה אותן עם התשובות שלך).

1. יש סקוטים קמצינים.
2. כל סקוטי הוא קמצן.
3. לפחות סקוטי אחד אינו קמצן.
4. אין סקוטים קמצינים.
5. יש סקוטים שאינם קמצינים.
6. לפחות סקוטי אחד הוא קמצן.

תשובות:

[illegible]

ניתן להציג כל טענה החלטית כיחס בין מחלקות, כאשר האותיות A ו-B מציינות מחלקות. **מחלקה** היא אוסף של איברים. למשל, בדוגמה הנ"ל: A היא מחלקת הסקוטים, המכילה את כל הסקוטים, ו-B היא מחלקת הקמצנים, המכילה את כל הקמצנים. ישנם קמצנים שאינם סקוטים. הם יהיו שייכים למחלקה B אולם לא למחלקה A.

כאשר כל איבר של מחלקה A הוא גם איבר של מחלקה B, אנו אומרים שמחלקה A מוכלת במחלקה B. איזו טענה מתוך א' - ד' טוענת ש-A מוכלת ב-B?

נסח את ארבעת סוגי הטענות ההחלטיות, כאשר A מציין את מחלקת התלמידים ו-B מציין את מחלקת השקרנים.





צ"ן על הדיאגרמה נקודה המתאימה לתלמיד, ונקודה המתאימה לשקרו שאינו תלמיד. היכן "מצאו דוברי האמת?"

אם מעגל מסוים מייצג את מחלקת ה-A-ים - אזי כל נקודה אשר מחוץ למעגל תייצג מישהו או משהו שאיננו A.
כל אחת מארבע הצורות התקניות של טענות החלטיות תיוצג על-ידי דיאגרמת מעגלים מתאימה.

צ״ר את הדיאגרמה המתאימה לכל אחת מהטענות ההחלטיות הבאות:
א. מחלקה A מוכלת במחלקה B:

ב. מחלקות A ו-B זרות (כלומר, שהחיתוך שלהן הוא מחלקה ריקה):

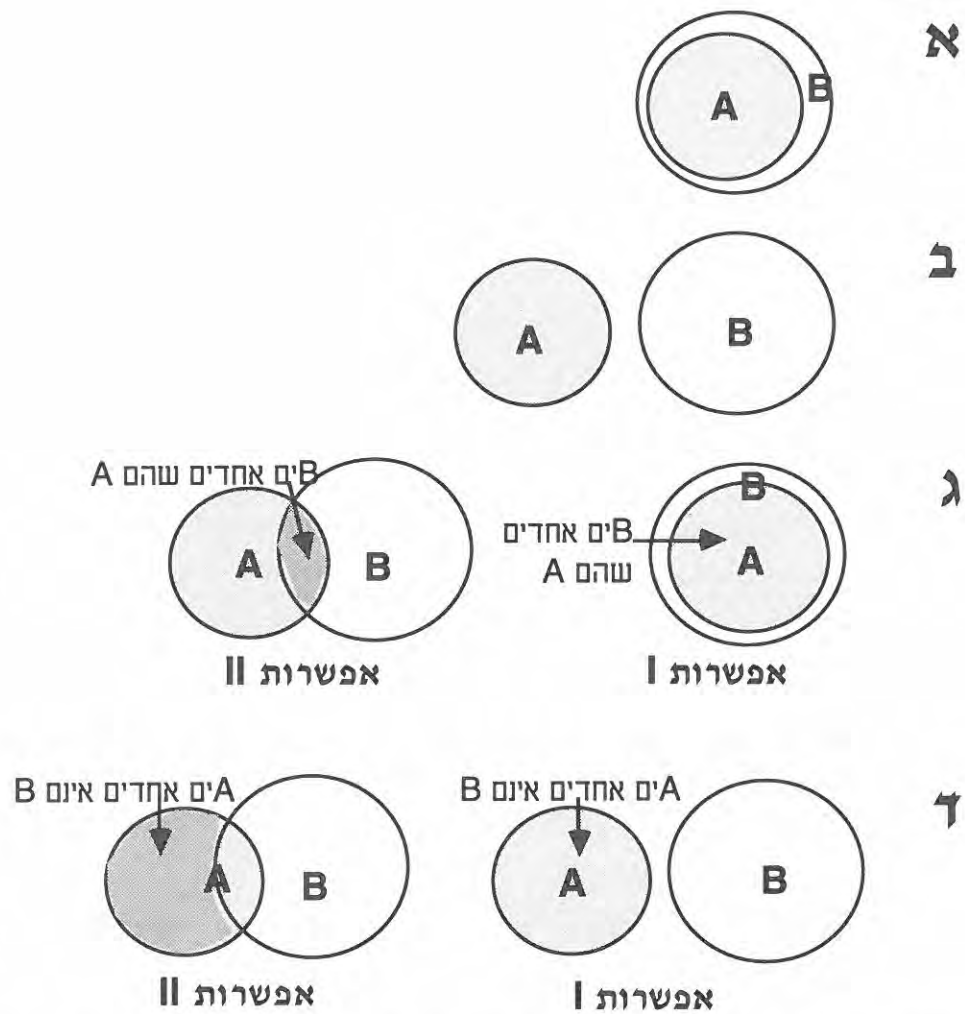
להזכירך: החיתוך של שתי מחלקות A ו-B הוא קבוצת כל האיברים השייכים גם ל-A וגם ל-B. הקבוצה הריקה היא קבוצה שאין בה איברים.

ג. החיתוך של A ו-B אינה קבוצה ריקה.

4. האיברים של A, שאינם שייכים לחיתוך של A ו-B, אינם מהווים מחלקה ריקה:



תשובות:



מעטה ואילך נוכל להשתמש בהמחשה הגרפית ככלי לבדיקת טיעונים הכוללים טענות החלטיות.

להוסיף דוגמאות, לקבוע מהי הצורה התקנית של הטענה ההחלטית המתאימה ולהוסיף דיאגרמת מעגלים, למשל:

1. לא כל הפרופסורים מפוזרים (ד)
2. רק מומחים מבינים אמנות מודרנית (א)
3. תלמידים אחדים אינם שאפתנים (ד)
4. שום אדם אינו יכול לעוף (ב)
5. חוסך שבטו שונא בנו (א)
6. תלמיד שוחרר מהשתתפות בשיעור (ג)
7. אין ארץ קומוניסטית שבה כלכלת עוץ (ב)
8. לא כל ספרי הלימוד משעממים (ד)
9. מתמטיקאים אוהבים מוסיקה (ייתכן שמדובר בכולם ואז זה א', אך יתכן שאחדים, ואז זה ג')



היסקים ישירים

נתבונן בטיעון הבא:

כל סוסי היאור הם שחיינים;
כל השחיינים יודעים לשחות;
לכן כל סוסי היאור יודעים לשחות.

הטיעון הזה מורכב מטענות החלטיות. את המסקנה "כל סוסי היאור יודעים לשחות" אנו מסיקים מתוך ההקדמה: "כל סוסי היאור הם שחיינים", **בתיאור** ההקדמה השנייה. כלומר, המסקנה איננה מסקנה ישירה. אולם מתוך הטענה: "כל סוסי היאור הם שחיינים", אפשר גם להסיק מסקנה **ישירה**: "שחיינים אחדים הם סוסי יאור". אנו מסיקים את המסקנה הזאת באופן ישיר מתוך הקדמה אחת, ללא תיאור של טענה החלטית אחרת. מתוך טענה החלטית ניתן לעתים להסיק מסקנה **באופן ישיר** - כלומר, ללא תיאור של טענה נוספת - זאת כאשר המסקנה מתקבלת כתוצאה מהחלפת מונח הנושא במונח הנשוא ולהיפך, ולעתים גם נדרש שינוי הכמת.

היסק הוא **הוצאת מסקנה** מהקדמה אחת או יותר. כאשר המסקנה מוסקת מהנחה אחת בלבד ההיסק הוא **היסק ישיר**. כאשר המסקנה מוסקת מיותר מהנחה אחת ההיסק הוא **היסק עקיף**.

נסמן בחץ את **יחס הנביעה** או **ההסקה**, כלומר: "א - ב" פירושו ש"מתוך א מסיקים את ב" או: ש"ב נובע מ-א".

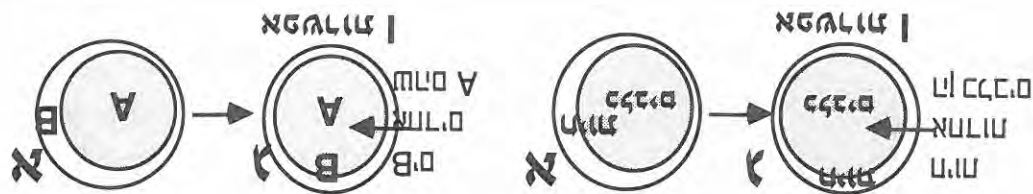
כדאי לברר את ההבחנה בין היסק לבין טיעון. ההיסק הוא **פעולת** הוצאת המסקנה. בהיסק **מסיקים** מנכונותה או שקריותה של טענה אחת את אמיתותה או שקריותה של טענה אחרת.

שרטט ליד כל אחד מההיסקים הישירים הבאים את דיאגרמת המעגלים המתאימה.

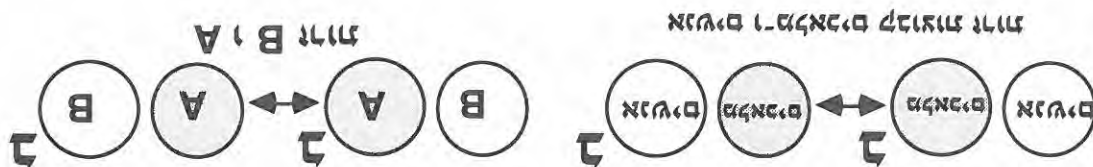
מתוך הדיאגרמה ניתן לעמוד בקלות על נכונות ההיסק:

1. כל הכלבים הם חיות - חיות אחדות הן כלבים. כל A הוא B - B אחדים הם A. (טענה החלטית א' - טענה החלטית ג')



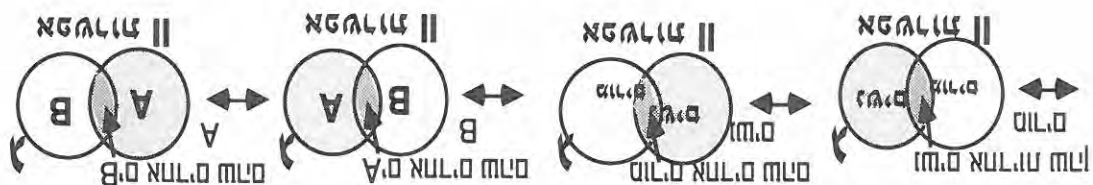


2. שום אדם אינו מלאך >—< שום מלאך אינו אדם. (מענה החלטית ב' >—< מענה החלטית ב')
- שום A אינו B >—< שום B אינו A.



3. מורים אחדים הם נשים >—< נשים אחדות הן מורים. (מענה החלטית ג' >—< מענה החלטית ג')
- A אחדים הם B >—< B אחדים הם A.

חץ דו-ראשי מציינ שני היסקים - מהטענה שמימין לטענה שמשמאל ולהיפך (משמאל לימין).
למשל, מתוך: "מורים אחדים הם נשים" נובע ש"נשים אחדות הן מורים" ולהיפך:
ומתוך: "נשים אחדות הן מורים" נובע ש"מורים אחדים הם נשים".



בהיסק 1, מתקבלת המסקנה על-ידי החלפה הדדית של הנושא והנשוא בד בבד עם החלפת הכמת "כל" בכמת "אחדים". ואילו כל אחד מההיסקים 2, ו-3, מבטאים יחס סימטרי - המסקנה נובעת מהחלפת הנושא והנשוא בלבד, כשהכמת נשאר ללא שינוי. **שים לב לסימטריה בגרפי של ההיסקים 2 ו-3.**



בכל אחד משלושת ההיסקים הנ"ל ההקדמה היא אחת משלוש הצורות התקניות א', ב', ו-ג'.

ומה אפשר להסיק מתוך טענה החלטית בעלת צורה ד' - כשמחליפים את הנושא והנשוא? למשל, מה אפשר להסיק מתוך: "סקוטים אחדים אינם קמצנים"?

אי אפשר להסיק ש"קמצנים אחדים אינם סקוטים", למרות שהטענה הזאת אמיתית. אם אפשר היה להסיק זאת, אזי מכל טענה מסוג ד' אפשר היה להסיק טענה כזאת, כאשר הנושא והנשוא מחליפים תפקידים. ואז אפשר היה להסיק מתוך הטענה האמיתית: "חיות אחדות אינן כלבים" את הטענה השקרית: "כלבים אחדים אינם חיות". אך, כפי שראינו, בטיעון תקף - לא ייתכן שהמסקנה תהיה שקרית כאשר ההקדמות אמיתיות. כלומר, טיעון בעל הדפוס [A-ים אחדים אינם B, לכן B-ים אחדים אינם A] אינו תקף ולכן כל טיעון בעל דפוס כזה אינו תקף.

הבא דוגמאות נוספות המכריכות את הטיעון הזה. [A-ים אחדים אינם B, לכן B-ים אחדים אינם A]

גם את הטענה "כל הקמצנים הם סקוטים" אי אפשר להסיק מתוך "סקוטים אחדים אינם קמצנים", שאם כך היה הדבר - אזי מכל טענה מצורה ד' אפשר היה להסיק טענה מסוג א' אשר בה הנושא והנשוא מחליפים תפקידים. אולם, למשל, מתוך הטענה האמיתית "ילדים אחדים אינם ישראלים" אי אפשר להסיק את הטענה "כל הישראלים הם ילדים" - שהרי הטענה האחרונה היא שקרית, וכבר ראינו שבטיעון תקף לא יתכן שהמסקנה תהיה שקרית כאשר ההקדמות אמיתיות. כלומר, טיעון בעל הדפוס: [A-ים אחדים אינם B לכן כל ה-B-ים הם A] אינו תקף ולכן כל טיעון בעל דפוס כזה אינו תקף.

הבא דוגמאות נוספות המכריכות את הטיעון [A-ים אחדים אינם B לכן כל ה-B-ים הם A].

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

טענות החלטיות

צורות תקניות של טענות החלטיות

כמתים, אוגדים

מחלקה, מחלקות זרות, חיתוך של מחלקות,

מחלקה מוכלת במחלקה אחרת, הקבוצה הריקה

המחשה גרפית של טענות (דיאגרמות ון)

היסקים ישירים

יחס הנביעה/ההסקה



שיעור 9: טענות סותרות, הופכיות, תת-הופכיות, משעבדות ומשועבדות

בשיעור זה נלמד להסיק באופן שיטתי מסקנות שונות הנובעות באופן ישיר מהטענות ההחלטיות מארבעת הסוגים (הצורות התקניות).

כאשר אנו אומרים שאין זה נכון ש"כל התלמידים בטלנים" - האם אנו מתכוונים לומר ש"שום תלמיד אינו בטלן"? ואולי: ש"תלמידים אחדים אינם בטלנים"? וכאשר אנו אומרים: "תלמידים אחדים הם בטלנים" - האם הטענה: "תלמידים אחדים אינם בטלנים" יכולה גם היא להיות נכונה? בשיעור זה נמצא דרך לעשות קצת סדר בשאלות הללו.

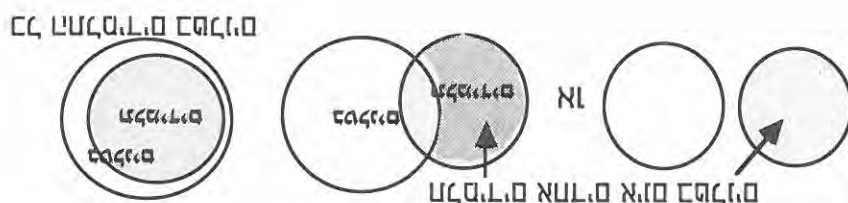
טענות סותרות

מה הקשר בין הטענה: "כל התלמידים בטלנים", לבין הטענה: "תלמידים אחדים אינם בטלנים"?

אלו הן טענות מסוג א' ו-ד' על-פי הסימון שבו השתמשנו בשיעור הקודם. אנו אומרים שהטענות **סותרות** האחת את השנייה.

מה פירוש סותרות? האחת היא שלילתה של השנייה, כלומר כל אחת מהן טוענת שהשנייה שקרית או לא נכונה.

שרטט דיאגרמות המייצגות את כל אחת משתי הטענות. אחר כך השווה עם הדיאגרמות בפרק הקודם.



מתוך הדיאגרמות אנו רואים שאין שתי הטענות יכולות להיות אמיתיות בעת ובעונה אחת. כי אם מחלקת התלמידים מוכלת כולה במחלקת הבטלנים הרי לא ייתכן שישנם תלמידים שאינם בטלנים. ואם תלמידים אחדים אינם בטלנים הרי שלא ייתכן שמחלקת התלמידים



מוכלת (כולה) במחלקת הבטלנים - וזה בדיוק מה שאומרת הטענה הראשונה. בנוסף על-כך אי-אפשר ששתי הטענות תהיינה שקריות בעת ובעונה אחת. כאשר הראשונה שקרית, פירושו של דבר שתלמידים אחדים אינם בטלנים - ואז הטענה השנייה אינה יכולה להיות שקרית; וכאשר השנייה שקרית, פירושו של דבר שאין זה נכון שתלמידים אחדים אינם בטלנים, דהיינו - כל התלמידים בטלנים; כלומר, הטענה הראשונה היא אמיתית.

שתי טענות סותרות אינן יכולות להיות אמיתיות בעת ובעונה אחת וגם אינן יכולות להיות שקריות בעת ובעונה אחת.

לכן, אם טענה אחת אמיתית, אנו מסיקים שבת-זוגה שקרית, ואם טענה אחת שקרית אז נובע מכך שבת-זוגה אמיתית. שני אלה הם **היסקים ישירים**.

גם טענות מהצורות ב' ו-ג' הן סותרות; האחת היא שלילתה של השנייה.
לדוגמה:

"שום חייל אינו פחדן" ו"חיילים אחדים הם פחדנים".

הראה זאת באמצעות שרטוט דיאגרמות המעגלים ודיאגרמות ון המתאימות.

הבא דוגמאות נוספות לטענות מהצורות התקניות א'-ד', וב'-ד' שהן סותרות.

התלמידים יתבקשו להראות בדרך שהודגמה לעיל שהטענות שהביאו הן סותרות. למשל:
כל הציפורים עפות (א) - ציפורים אחדות אינן עפות (ד).
אף דוב אינו עף (ב) - דובים אחדים עפים (ו)

טענות הופכיות

נתבונן כעת בזוג הטענות: "כל התלמידים בטלנים" ו"שום תלמיד אינו בטלן". זוג טענות החלטיות אלה הן מהצורה א ו-ב והן קרויות טענות **הופכיות**.

האם שתיהן יכולות להיות אמיתיות? האם שתיהן יכולות להיות שקריות?

שרטט את דיאגרמות המעגלים המתאימות ונסה לתת את התשובה בעצמך.

הגעת לתשובה? אם כן, השווה אותה עם התשובה לאחר הקטע הבא. אם לא, קרא את הקטע הבא.



-

להוכחה מסוג זה קוראים **"הוכחה בדרך השליה"**: מניחים שמה שמנסים להוכיח אינו נכון, ואם זה גורר מסקנה שאינה נכונה - מסיקים שההנחה (שמה שמנסים להוכיח אינו נכון) איננה נכונה, לכן מה שיש להוכיח הוא נכון!

התשובה היא, לכן: **שתי טענות הן תת־הפכיות אם אי אפשר ששתיהן יחדיו תהיינה שקריות, אולם ייתכן ששתיהן יחדיו תהיינה אמיתיות.**

**נסח את ההיסקים הישירים הנובעים מכך.
הבא דוגמאות נוספות לטענות שהן תת־הפכיות.**

דוגמה: יש גנבים שותפים (ג) - יש גנבים שאינם נתפסים (ד).
 "ייתכן ששתי הטענות אמיתיות. אך לא ייתכן ששתיהן יחד שקריות. אם הטענה הראשונה שקרית. כלומר, גנבים אינם נתפסים - הטענה השנייה אמיתית."

טענות משועבדות

מתוך אמיתות טענה בעלת צורה א' נובעת, כזכור, אמיתות הטענה (המתאימה) בעלת צורה ג'.

למשל, אם הטענה: "כל התלמידים בכיתה ישראלים" אמיתית, נובע מכך שגם הטענה: "תלמידים אחדים בכיתה הם ישראלים" היא אמיתית. גם זה הוא היסק ישיר.
 כאשר אנו אומרים "אחדים מהם ישראלים" איננו מתכוונים לשלול את האפשרות שכל התלמידים ישראלים; אם אנו רוצים לשלול את האפשרות האחרונה, נאמר כי **"רק** תלמידים אחדים ישראלים". משמעות זו תואמת את המשמעות של "קבוצה חלקית" בתורת הקבוצות. אם בכיתה יש ארבעים תלמידים וכולם ישראלים, הרי יהיה זה בוודאי נכון שגם כל קבוצה חלקית מהם מורכבת מישראלים. כאשר אנו אומרים "אחדים", אנו מתכוונים לכל קבוצה חלקית, **כולל הקבוצה כולה** (קבוצה כוללת את עצמה כקבוצה חלקית).

אולם ההיסק בכיוון ההפוך אינו תקף: הטענה "כל התלמידים בכיתה הם ישראלים" אינה נובעת מהטענה ש"אחדים מהתלמידים בכיתה הם ישראלים".
 מתוך הטענה (האמיתית) "חיות אחדות הן חתולים" אי אפשר להגיע למסקנה (השקרית) ש"כל החיות הן חתולים".

או מתוך הטענה ש"בעלי-כנף אחדים הם עופות" לא נובע ש"כל בעלי הכנף הם עופות" (מטוסים ומלאכים, למשל, אינם עופות!).

בז' ופן דומה, מתוך אמיתות טענה בעלת צורה ב' נובעת אמיתות הטענה (המתאימה) בעלת צורה ד', אולם לא להיפך. מתוך הטענה "שום סוס-עץ אינו חיה" נובע ש"סוס-עץ אחדים אינם חיות". אולם מתוך הטענה ש"תלמידים אחדים אינם בטלנים" לא נובע ש"שום תלמיד אינו בטלן".

הבא דוגמאות נוספות.



טענה מצורה א' או ב', **שמאמיתותה נובעת אמיתות טענה אחרת, תיקרא משעבדת**, והטענה **שמאמיתותה נובעת ממנה**, מסוג ג' או ד' (בהתאמה), **תיקרא משועבדת**. מתי בכל זאת ניתן להגיע למסקנה לגבי אמיתותה או שקריותה של הטענה המשעבדת על סמך ידיעת ערך-האמת (אמת או שקר) של הטענה המשועבדת?

תשובה: אם ידוע שהטענה המשועבדת שקרית, נובע שגם הטענה המשעבדת המתאימה שקרית. שהרי אם אין זה נכון שאחדים מאיברי המחלקה A הנם (או אינם) B - ברור שגם אין זה נכון שכל איברי A הנם (או אינם) B. כלומר, טענה משועבדת שידוע שהיא שקרית - < טענה משעבדת שקרית.

טענה משעבדת שידוע שהיא אמיתית - < טענה משועבדת אמיתית
 "שום תלמיד אינו בטלן" - < "תלמידים אחדים אינם בטלנים".
 הכיוון ההפוך לא ידוע:
 מ"תלמידים אחדים אינם בטלנים" לא נובע "שום תלמיד אינו בטלן". אבל,
 טענה משועבדת שידוע שהיא שקרית - < טענה משעבדת שקרית
 מ"תלמידים אחדים אינם בטלנים" שקרית - נובע "שום תלמיד אינו בטלן" שקרית גם כן.
 מדוע?

אם אין זה נכון שפרות משה-רבנו אחדות נותנות חלב, אז בוודאי שאין זה נכון שכל פרות משה-רבנו נותנות חלב.
 ואם אין זה נכון שחיילי-שוקולד אחדים אינם מתוקים אז בוודאי שאין זה נכון שכל חיילי-השוקולד אינם מתוקים.

הבא דוגמאות נוספות.

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

טענות סותרות

טענות הופכיות

טענות תת-הופכיות

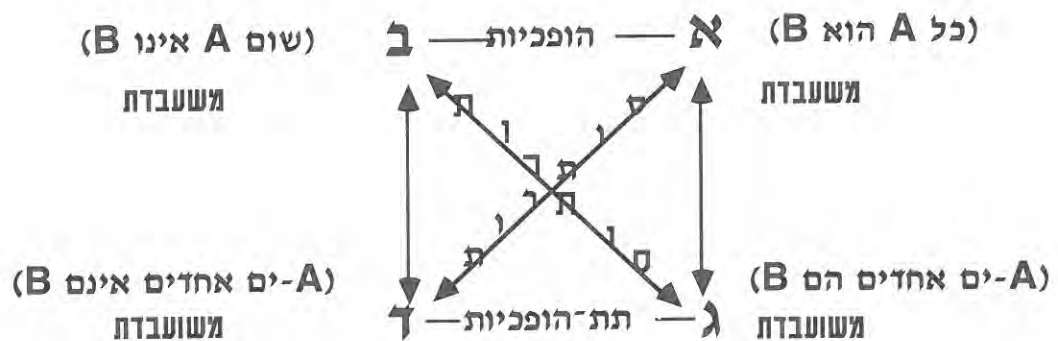
טענות משעבדות ומשועבדות

הוכחה בדרך השלילה

שיעור 10: ריבוע הניגודים

כעת נוכל לסכם באופן גרפי את כל התכונות שלמדנו עד כה לגבי טענות החלטיות.

הסיכום הגרפי של כל התכונות שלמדנו לגבי טענות מוחלטות ייעשה באמצעות **ריבוע הניגודים** אשר בו מופיעות הטענות ההחלטיות שצורתן התקנית אי - ד' בצורה הבאה:



מתוך מה שראינו לעיל בקשר ליחסי סתירה, הופכיות, תת-הופכיות והשתעבדות נובעים 16 היסקים ישירים.

למשל, היסקים ישירים שנובעים מטענה החלטית בעלת צורה תקנית ד': על-פי ריבוע הניגודים, יש כאן 4 היסקים (כאשר אנו מציינים א', אנו מתכוונים לטענה מהצורה א' וכו'):

1. מתוך ד' אמיתית נובע א' שקרית (סותרות)
 2. מתוך ד' שקרית נובע א' אמיתית (סותרות)
 3. מתוך ד' שקרית נובע ב' שקרית (משעבדת)
 4. מתוך ד' שקרית נובע ג' אמיתית (תת-הופכיות)
- מתוך ד' אמיתית לא נובע כלום בקשר לב' ו/או בקשר לג'.

מתוך שקריות ד' נובע ש-א' אמיתית, כיוון שכטענות סותרות לא ייתכן ששתיהן שקריות. כמו-כן נובעת מכאן שקריות ב', כיוון שאם טענה משועבדת שקרית, גם הטענה המשעבדת שקרית.

ולבסוף. אם ד' שקרית אז ג' אמיתית, כיוון ש-ד' ו-ג' הן תת-הופכיות ולכן אינן יכולות להיות שקריות שתיהן.

לעומת זאת, כאשר נתון ש-ד' אמיתית, איננו יכולים להסיק דבר על ערך האמת של ב' או על ערך האמת של ג' [מדוע?].



לוח ההיסקים הישירים המתוארים בריבוע הניגודים:

בלוח הבא נרשום את 16 ההיסקים שנובעים מריבוע הניגודים. (ראה בטבלה את ההיסקים הרשומים כבר - הנובעים מטענה החלטית ד')
מצא את 16 ההיסקים - באמצעות השלמת הטבלה, ובדוק האם הם נכונים (תקפים).

(אם אין אפשרות להסיק מסמנים סימן שאלה).

נתון:	א		ב		ג		ד	
	אמיתית	שקרית	אמיתית	שקרית	אמיתית	שקרית	אמיתית	שקרית
נובע (השלם במשבצות המתאימות. רשום ? כאשר הטענה לא מוגדרת):								
א	—	—					שקרית	אמיתית
ב			—	—			?	שקרית
ג					—	—	?	אמיתית
ד							=	=

הלוח המלא:

נתון:	א		ב		ג		ד	
	אמיתית	שקרית	אמיתית	שקרית	אמיתית	שקרית	אמיתית	שקרית
נובע								
א	—	—	ש	?	?	ש	שקרית	אמיתית
ב	ש	?	—	—	ש	א	?	שקרית
ג	א	?	ש	א	—	—	?	אמיתית
ד	ש	א	א	?	?	א	—	—

תרגילים:

1. מתוך הנחה שהטענה ש"חיות אחדות בעלות ציפורניים אין טורפות" שקרית, מה אפשר להסיק לגבי הטענה ש"חיות אחדות בעלות ציפורניים הן טורפות"?

תשובה:

הטענה "חיות אחדות בעלות ציפורניים הן טורפות" שקרית.
לכן הטענה "חיות אחדות בעלות ציפורניים הן טורפות" נכונה.
לכן הטענה "חיות אחדות בעלות ציפורניים הן טורפות" נכונה.

2. אם הטענה הבאה אמיתית: "מורים אחדים אינם טיפשים", מה אפשר להסיק מכאן לגבי הטענה "כל המורים אינם טיפשים"?



שיעור 11: היקשים

התלמידים כבר נתקלו בהיקשים (טיעון בעל שתי הקדמות). בשיעור זה ילמדו את הנושא בצורה יותר עיטתית תוך המחשה על ידי שימוש בטכניקת דיאגרמת המעגלים.

השיעור יפתח בטיעון זה:

נתבונן בטיעון הבא:

כל זמרי הפופ יודעים לשיר;
ארוכי שיער אחדים יודעים לשיר;
לכן ארוכי שיער אחדים הם זמרי פופ.

האם זה טיעון תקף או לא? **עזרו על כך הצבעה בין התלמידים.**

נראה בהמשך שהטיעון אינו תקף ושאינו קשר בין אמיחות ההקדמות ואמיחות המסקנה ובין תקפות הטיעון. גם אם כל ההקדמות והמסקנה אמיחות אין זה מוכיח את תקפות הטיעון. איך ניתן להוכיח שטיעון לא תקף?

בשיעור זה נעסוק בהיקשים, כמו הטיעון הנ"ל, שהם היסקים לא-ישירים.
היקש - הוא טיעון שבו המסקנה מוסקת משתי הקדמות.

נסה להיזכר כיצד קובעים האם טיעון או היקש תקף (הגיוני) או אינו תקף.
לפני שנדון בהיקש על זמרי הפופ וארוכי השיער נתבונן בדפוס הטיעון הבא שהוא תקף:

כל A הוא B;

כל C הוא A;

לכן כל C הוא B.

(במקום "הוא" יכול להופיע "הם")

נבטא את דפוס הטיעון בשפת המחלקות:

הקדמה ראשונה: מחלקה A מוכלת במחלקה B;

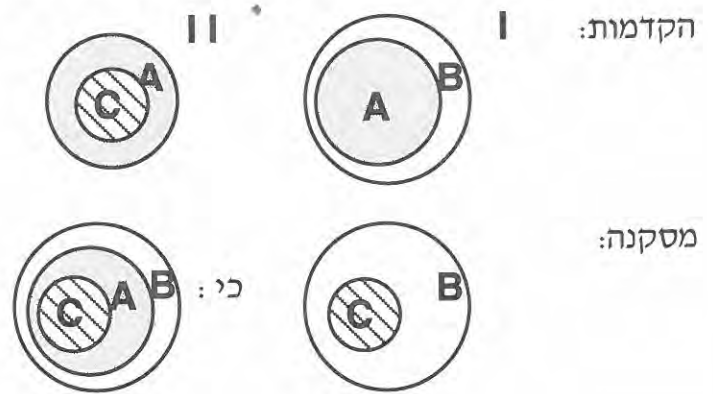
הקדמה שנייה: מחלקה C מוכלת במחלקה A;

מסקנה: מחלקה C מוכלת במחלקה B.

תקפות הטיעון הזה נובעת מהעובדה שאם מחלקה אחת מוכלת במחלקה שנייה המוכלת במחלקה שלישית, אזי מחלקה אחת מוכלת תמיד במחלקה השלישית (חוק הטרנסטיביות - חוק ההעברה).



את תקפות הטיעון אפשר להוכיח גם באמצעות דיאגרמת מעגלים:



בטיעון שבו פתחנו (זמרי הפופ, היודעים לשיר וארוכי השיער) ייתכנו חילוקי דעות בקשר לאמיתות ההקדמה הראשונה. ההקדמה השנייה אמיתית וכך גם המסקנה. אולם, כפי שראינו, גם אם כל ההקדמות והמסקנה אמיתיות - אין זה מוכיח את תקפות הטיעון.

ניתן להוכיח בשתי דרכים שטיעון לא תקף:

בדרך הראשונה כבר נתקלנו בשיעורים הקודמים - באמצעות הבאת דוגמה בעלת אותו דפוס טיעון, שבה ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית.

דפוס הטיעון הוא:

כל A הם B;

C אחדים הם B;

לכן C-ים אחדים הם A.

דוגמה בעלת דפוס זה שבה ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית:

כל החמורים הם צמחונים;

בני אדם אחדים הם צמחונים;

לכן בני אדם אחדים הם חמורים.

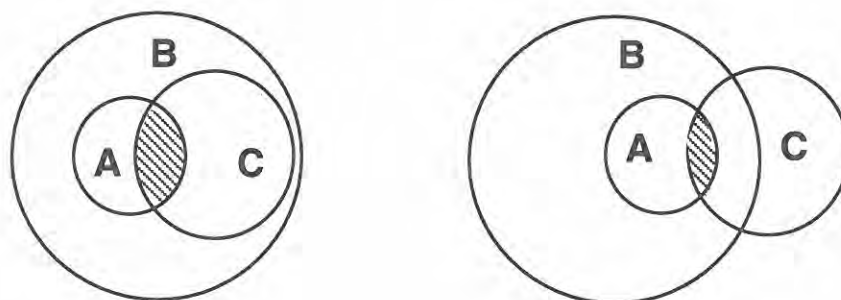
הבא דוגמאות נוספות בהן ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית.

הדרך השנייה להוכיח שהטיעון אינו הגיוני היא בדרך ההצגה הגרפית. ישנן שתי אפשרויות להציג באופן גרפי את דפוס הטיעון הנ"ל. בשני המקרים A מוכלת ב-B והחיתוך בין C ל-B אינו ריק; זה מה שטוענות שתי ההקדמות. אבל האם החיתוך בין C ל-A אינו ריק? - כי זהו מה שטוענת המסקנה!

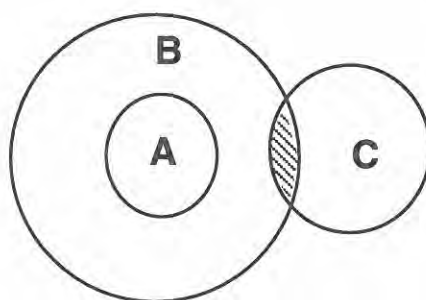


צייר את שתי הדיאגרמות.

1.



2.



במקרים המסומנים ב-1' - החיתוך בין C ל-A הוא מחלקה לא-ריקה. זהו המצב בהצבה של זמרי פופ, יודעים לשיר וארוכי שיער בדפוס הטיעון. במקרים אלו המסקנה נכונה. ואילו במקרה 2' - החיתוך הוא מחלקה ריקה. במקרה 2' המסקנה שקרית. מכאן שהמסקנה אינה בהכרח אמיתית, ולכן דפוס הטיעון אינו תקף.

דוגמה נוספת בעלת אותו דפוס:

הזברות לובשות פיגימה בשבת;
תלמידים/מורים אחדים לובשים פיגימה בשבת;
לכן תלמידים/מורים אחדים הם זברות.

כעת נביא דוגמאות לכך שבדפוס טיעון לא-תקף יכולים להיות מקרי הצבה עם כל הצירופים האפשריים, של הקדמות ומסקנה אמיתיות ושקריות - כולל (כפי שכבר ראינו) הקדמות אמיתיות ומסקנה אמיתית.

ניקח את דפוס הטיעון הזה:

כל A הוא B;

כל C הוא B;

לכן כל C הוא A.

הוכח תחילה באופן גרפי שטיעון זה אינו תקף ואחר־כך נסה למצוא דוגמת הצבה מקבילה לכל אחת מההצבות הבאות והשלם את המקומות הריקים:

כל יונק הוא בעל לב;	(אמת)
כל זאב הוא בעל לב;	(אמת)
לכן כל זאב הוא יונק .	(אמת)
כל סוס-יאור הוא יונק;	(אמת)
כל תינוק הוא יונק ;	(אמת)
לכן כל ----- הוא סוס-יאור.	(שקר)
כל חתול הוא בעל כנף;	(שקר)
כל יונה היא בעלת כנף;	(אמת)
כל ---- היא ----.	(שקר)
כל ----- הוא יונה ;	(שקר)
כל מטוס הוא יונה;	(שקר)
כל מטוס הוא בעל כנף.	(אמת)
כל זנב הוא ----;	(שקר)
כל ---- הוא יונה;	(שקר)
לכן כל ספר הוא ----.	(שקר)

היקשים חסרים

נתבונן בטיעון: "משה נולד לאם יהודיה, לכן משה הוא יהודי".
ידוע לכולנו שהטיעון הזה הוא "בסדר" - שהמסקנה כאן נובעת מההקדמה. אולם הטיעון תקף כיוון שאנו משתמשים כאן בהקדמה **חבויה** הידועה לכולנו, אלא שאיננו כותבים אותה במפורש כיוון שאנו יודעים שהיא ידועה לכולם. מהי ההקדמה הזאת?

ההקדמה היא: "כל מי שנולד לאם יהודיה הוא יהודי". הטיעון המלא הוא היקש. ההיקש הוא:

משה נולד לאם יהודיה;
כל מי שנולד לאם יהודיה הוא יהודי;
לכן משה הוא יהודי.



אולם טיעון זה לא יראה תקף למישהו שההקדמה השנייה אינה ידועה לו. למשל, לא כל סיני או אסקימוסי - ובוודאי שלא כל תושב מאדים - יודע זאת! ישנם אנשים שאפילו לא יודעים מה זה יהודי. כלומר הטיעון הנ"ל (ללא ההקדמה השנייה) יהיה מובן ותקף רק למי שההקדמה השנייה ידועה לו.

לטיעון כזה, שבו הקדמה אחת חסרה כיוון שהיא כבר ידועה "לכולם", כלומר - לאלה שאליהם מכוון הטיעון, קוראים בשם **היקש חסר**.

דוגמה נוספת של היקש חסר:

"במשולש הזה יש שתי זוויות בנות 45° , לכן זהו משולש ישר זווית".
מהו הטיעון השלם?

הטיעון השלם יהיה:

בכל משולש סכום שלושת הזוויות הוא 180° ;

במשולש הזה יש שתי זוויות בנות 45° ;

לכן הזווית השלישית במשולש היא בת 90° .

על מנת להשלים את הטיעון יש להוסיף גם את ההקדמה: "משולש אשר אחת מזוויותיו היא בת 90° - הוא משולש ישר זווית".

כאשר אנו עוסקים בתורת ההיגיון איננו יכולים להניח שום דבר כידוע או מובן מאליו; כי הרי אמרנו, ההיגיון הוא אותו ההיגיון בכל העולמות האפשריים. בעולם אפשרי שבו סכום הזוויות במשולש הוא 140° , תהיה הזווית השלישית בת 50° !

שאלה:

מהן ההקדמה, המסקנה וההקדמה החבויות בטיעון הבא:
"לשמעוני אין טלפון, כי שמו אינו מופיע בספר הטלפונים".

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

היקש

היקש חסר



שיעור 12: טיעוני בררות ותנאים

בשיעור הזה נכיר סוגים אחדים של היקשים.

היקש בררה

ישנם היקשים שאינם כוללים טענות החלטיות הקשורות ביניהן על-ידי יחסים בין מחלקות. נזכור שהיקש הוא טיעון המורכב משתי הקדמות ומסקנה.

נתבונן בטיעון הבא:

או שראובן זו הצדה או שראובן ייפגע ממכונית;
ראובן לא זו הצידה;
לכן ראובן ייפגע ממכונית.

דפוס הטיעון הזה הוא:

או א או ב;
לא א;
לכן ב.

"לא א" פירושו - שלילתה של הטענה א'.

היקש זה, הקרוי **היקש בררה**, הוא תקף, כיוון שבהקדמה הראשונה ישנה בררה בין שתי אפשרויות וההקדמה השנייה שוללת אחת מהן; נותרה אפוא האפשרות השנייה. משמעות ה"או" בהקדמה הראשונה היא שרק אחת מהבררות חייבת להתקיים ולא שתיהן יחד. כאן זהו "או" מוציא - בררת האפשרות האחת מוציאה מכלל אפשרות את השנייה (לפעמים אומרים "או-או" כאשר מתכוונים למשמעות זו). שתי הטענות אשר ה"או" המוציא מקשר ביניהן יכולות להיות אחת שקרית והשנייה אמיתית, אולם לא ייתכן ששתיהן יכולות להיות אמיתיות.

דוגמאות לשימוש ב"או" מוציא:

1. כאשר אם אומרת לבנה הקטן: "או שתאכל את הבננה או שתקבל עונש" היא מתכוונת לכך שרק אם לא יאכל את הבננה הוא יקבל עונש.
2. בררת קנס: בפני הנהג העבריין ניצבות שתי בררות: או לשלם את הקנס, או להישפט. אין הכוונה שגם ישלם את הקנס וגם יישפט.
3. כאשר ועד העובדים במפעל אומר "או שהמשא ומתן עם המעבידים יסתיים בהצלחה או שיהיו כאן מהומות" והוא מתכוון שלא יקרו שני הדברים יחד.



האם גם ההיקש הבא תקף?

או שראובן זו הצידה או שראובן יפגע ממכונית;

ראובן זו הצידה;

לכן ראובן לא יפגע ממכונית.

הדבר תלוי במשמעות של המלה "או". אילו משמעות ה"או" היתה שרק אחת מהבררות חייבת להתקיים ולא שתיהן יחד ("או" מוציא) אזי הטיעון תקף.

אולם ל"או" יש גם משמעות של "או" כולל; זאת כאשר שתי הבררות יכולות להתקיים יחדיו. זהו אפוא "או" במשמעות "ו/או".

המקרים הבאים הם דוגמאות לשימוש ב"או" כולל:

1. "אם תלמיד ידבר או ייתפס בהעתקה, בחינתו תיפסל" (**מדוע זה "או" כולל?**).
2. "מתקבלים לעבודה או עם תעודת BA או עם ניסיון של 5 שנים". (**ואם יש שניהם?**).
3. ועד העובדים במפעל אומר "או שהמשא ומתן עם המעבידים יסתיים בהצלחה או שיהיו כאן מהומות". ייתכן שהמשא ומתן יסתיים בהצלחה אבל יפרצו מהומות מסיבות אחרות.

במקרה של ההיקש האחרון המשמעות של ה"או" בטיעון היא המשמעות השנייה, דהיינו של "או" כולל. כיוון שאם ראובן יסור הצדה, הוא אמנם לא יפגע מהמכונית הזאת, אולם ייתכן שייפגע ממכונית אחרת.

שתי הטענות אשר ה"או" הכולל מקשר ביניהן יכולות להיות אמיתיות, או אחת שקרית והשנייה אמיתית, אולם לא ייתכן ששתיהן יכולות להיות שקריות; לכן כאשר האחת שקרית השנייה חייבת להיות אמיתית.

דפוס הטיעון האחרון הוא:

או א או ב;

א;

לכן לא ב.

כפי שראינו, אם ה"או" הוא "או" כולל, אזי דפוס טיעון זה **אינו** תקף. כדי להוכיח שדפוס הטיעון אינו תקף מספיק שנביא דוגמה שבה שתי ההקדמות אמיתיות ואילו המסקנה שקרית (למשל בדוגמה הנ"ל - ראובן זו הצדה ונפגע ממכונית אחרת).



פסוק תנאי והיקש תנאי

הנושא "פסוק תנאי והיקש תנאי" דורש תשומת לב מרובה, וקשה להבנה יותר מנושאים אחרים. כי ההיגיון הפורמאלי לא תמיד מתאים להיגיון האינטואיטיבי של רוב בני האדם. קל "להבין" פרק זה כאשר מתייחסים אליו בדרך "טכנית".

דוגמה ל פסוק תנאי:

"אם לא תלמד אז תהיה מוכר בשוק".

לפסוק זה ישנם שני חלקים: אם ... (טענה א') אז ... (טענה ב').
הטענה המופיעה אחרי המלה "אם" - היא ה"רישא" (ראש בארמית. הכוונה לטענה שמופיעה בראש הפסוק), והטענה המופיעה אחרי "אז" - היא ה"סיפא" (סוף בארמית. הכוונה לטענה המופיעה בסוף הפסוק).
במקום המלה "אז" יכולה גם להופיע המלה "הרי", ולפעמים לא מופיעה אף מלה (ראה למשל ההקדמה השנייה בטיעון דלהלן).
מדוע הפסוק נקרא "פסוק תנאי"? - כיוון שניתן לפרש את הפסוק כך: הסיפא יתקיים בתנאי שהרישא יתקיים.

יש להדגיש שפסוק תנאי מתאר קשר בין הרישא והסיפא. הוא מוען שאם הרישא אמיתי - גם הסיפא אמיתי. מבלי להיכנס לסיבה ולהיגיון של הקשר בין שני חלקי הפסוק.

כעת נעבור להיקש תנאי טהור המורכב אך ורק מפסוקי תנאי:
אם לא תלמד, אז תהיה מוכר בשוק;
אם תהיה מוכר בשוק, יהיה לך כסף;
אם ב אז ג;
לכן אם לא תלמד, יהיה לך כסף.
לכן אם א אז ג;

על-ידי צירוף שני היקשי תנאי ניתן לקבל היקש תנאי מורכב, כגון:
אם אין לך כסף, לא תלמד;
אם לא תלמד, תהיה מוכר בשוק;
אם תהיה מוכר בשוק, יהיה לך כסף;
לכן אם אין לך כסף, יהיה לך כסף.

ההיקש המורכב הזה הוא צירוף של שני היקשים. אילו הם?

תשובה: ההיקשים הם:

1. אם אין לך כסף, לא תלמד; אם לא תלמד, תהיה מוכר בשוק; לכן אם אין לך כסף, תהיה מוכר בשוק.
2. אם אין לך כסף, תהיה מוכר בשוק (זוהי המסקנה של ההיקש הראשון); אם תהיה מוכר בשוק, יהיה לך כסף; לכן אם אין לך כסף, יהיה לך כסף.



היקש תנאי מעורב (רק אחת ההקדמות היא פסוק תנאי):

דוגמה **דפוס הטיעון**
 אם ירקוני דיבר אמת, הרי ירדני גנב ; אם א או ב;
 ירקוני דיבר אמת; א;
 לכן ירדני גנב . לכן ב.

בטיעון זה, ההקדמה השנייה מאשרת את הרישא של הקדמת התנאי והמסקנה מאשרת את הסיפא שלה. צורת הטיעון הזה קרויה בשם "**חיוב הרישא**" (בלטינית: modus ponens). כפי שנראה בהמשך, זהו טיעון תקף.

לעומת זאת, הטיעון הבא:
 אם קישוני גנב את הספר, הרי קישוני פושע; **דפוס הטיעון הוא:** אם א או ב;
 קישוני פושע; ב;
 לכן קישוני גנב את הספר. לכן א.

הטיעון אינו תקף, ונוכיח זאת ע"י הצבה. למשל, ההצבה הבאה בדפוס הטיעון נותנת הקדמות אמיתיות ומסקנה שקרית:
 א. "הכיתה היא מטוס ג'מבו". ב. "יש לכיתה חלונות".
מהו הטיעון המתקבל על-ידי הצבה זו?

אם הכיתה היא מטוס ג'מבו אז יש לכיתה חלונות: (אמיתי)
 יש לכיתה חלונות: (אמיתי בדרך כלל)
 לכן: הכיתה היא מטוס ג'מבו. (שקרית).

פסוק התנאי (ההקדמה הראשונה) המתקבל על-ידי ההצבה הוא אמיתי, גם ההקדמה השנייה אמיתית (בתנאי שהכיתה איננה נמצאת במרתף) ואילו המסקנה שקרית. זהו אפוא טיעון לא תקף כי יש בו הקדמות אמיתיות ומסקנה שקרית.
 הטיעון איננו תקף אולם הוא דומה לטיעון בעל דפוס תקף (חיוב הרישא). זוהי אפוא הטעיה: **הטעיית חיוב הסיפא**, שהיא הטעיה רווחת למדי.
הבא דוגמאות נוספות להטעיית חיוב הסיפא.

היקש תנאי מעורב בעל דפוס אחר הוא **שלילת הסיפא** (בלטינית: modus tollens):
 אם זלמן כתב את "מלחמה ושלוש", הרי זלמן יודע לכתוב;
 זלמן אינו יודע לכתוב;
 לכן זלמן לא כתב את "מלחמה ושלוש".

מהו דפוס הטיעון?

כפי שנראה בהמשך, זהו טיעון תקף. לא נוכל למצוא דוגמה של הצבה עם הקדמות אמיתיות ומסקנה שקרית.



לעומת זאת, הטיעון הבא אינו תקף:
 אם זלמן כתב את "מלחמה ושלוש", הרי זלמן יודע לכתוב;
 זלמן לא כתב את "מלחמה ושלוש";
 לכן זלמן אינו יודע לכתוב.

מהו דפוס הטיעון?

הבא דוגמה לכך שהטיעון אינו תקף.
למשל אתה יכול להביא את עצמך כדוגמה! - כיצד?
אם במקום "זלמן" תציב את שמו!
אתה לא כתבת את "מלחמה ושלוש", אולם לכתוב אתה יודע.

לכן דפוס הטיעון אינו תקף, כי כשהיצבת ההקדמות היו אמיתיות והמסקנה שקרית.

דוגמה שנייה:

אם כהן מעל בכספי הבנק, הרי כהן מושחת;
 כהן לא מעל בכספי הבנק;
 לכן כהן אינו מושחת.

טיעון זה אינו תקף כי הוא בעל דפוס לא תקף. (ייתכן, אמנם, שכהן לא מעל בכספי הבנק אבל ביצע מעשי שחיתות רבים אחרים).
 צורת טיעון זו קרויה **הטעיית שלילת הרישא**, כי היא דומה לצורה התקפה של שלילת הסיפא, וגם היא רווחת למדי.

דוגמאות - הגיוני או לא הגיוני?

1. **חיים הוא המתופך או שהוא נגן הבס;** (ההנחה היא שאינו יכול לשמש בשני התפקידים)
חיים אינו המתופך;
לכן חיים הוא נגן הבס.

תשובה: דפוס הטיעון הוא של היקש בררה, לכן הטיעון תקף.

2. **אם יוסי דיבר אמת, הרי דני העתיק;**
אם גדי דיבר אמת, הרי דני העתיק;
לכן אם יוסי דיבר אמת, הרי גדי דיבר אמת.

תשובה: דפוס הטיעון הוא:
 אם א אז ב;
 אם ג אז ב;
 לכן אם א אז ג.

דפוס זה אינו תקף.



הרי **דוגמה מפריכה** (דוגמה הסותרת את הטעון, שבה המסקנה שיקרית):
 אם ביאליק כתב את "אל הציפור", אזי ביאליק ידע לכתוב;
 אם ביאליק כתב את "שיר השירים", אזי ביאליק ידע לכתוב;
 לכן אם ביאליק כתב את "אל הציפור", ביאליק כתב את "שיר השירים".

3. **אם רמי העתיק, הרי שרני דובר אמת;
 אם רני דובר אמת, הרי שרני לא העתיק;
 לכן אם רמי העתיק, הרי שרני לא העתיק.**

תשובה: הטעון תקף. ואומנם, דפוס הטעון הוא:

אם א אז ב;
 אם ב אז ג;
 לכן אם א אז ג.

דפוס טעון זה הוא היקש תנאי טהור.

4. **מר ראובני הוא שכנו הקרוב ביותר של שמעוני, או מר ידקוני הוא שכנו הקרוב ביותר של שמעוני;
 אולם מר ידקוני אינו שכנו הקרוב ביותר של שמעוני;
 לכן מר ראובני הוא שכנו הקרוב ביותר של שמעוני.**

תשובה: דפוס הטעון הוא של היקש בררה ולכן הטעון תקף.

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

היקש תנאי מעורב	היקש בררה
חיוב הרישא	"או" מוציא
הטעיית חיוב הסיפא	"או" כולל
שלילת הסיפא	פסוק תנאי
הטעיית שלילת הרישא	רישא, סיפא
דוגמה מפריכה	היקש תנאי טהור



שיעור 13: האלגברה של ההיגיון: הצצה ראשונה לתחשיב הפסוקים

בשיעור זה נעסוק בתחשיב פסוקים: נלמד לחשב האם פסוקים אמיתיים או שקריים. בניסוח אחר: נחשב מהו ערך האמת של כל פסוק. ערך האמת יכול להיות "אמת" או "שקר". (בצורה מקוצרת: "אמת" יצוין כ"א" או 1 ו"שקר" כ"ש" או 0)

פסוקים יכולים להיות פשוטים או מורכבים. פסוק מורכב הוא צירוף של פסוקים פשוטים הקשורים ביניהם בקשרים לוגיים כגון באמצעות וו-החיבור (רוני אוכל ורוני קורא עיתון). או באמצעות מלות הקשר "אם", "או", "אז" (אם אחת רעב או צמא - אז תלך לקיוסק). כדי לקבוע את ערך האמת של פסוק מורכב יש לדעת את ערכי האמת של מרכיביו, ואת חוקי החשבון של הקשר הלוגי.

למשל, כדי לדעת מהו ערך האמת של הפסוק המורכב "רוני אוכל וקורא עיתון" (האם הוא נכון או לא, האם הוא מתקיים או לא) צריך לדעת את ערך האמת של "רוני אוכל", (אמת או שקר). צריך לדעת את ערך האמת של הפסוק "רוני קורא עיתון" (אמת או שקר). ואת חוקי החשבון של וו החיבור (הפסוק המורכב אמיתי רק אם כל אחד ממרכיביו הוא אמיתי. כלומר, רק אם רוני אכן קורא עיתון וגם אוכל - המשפט המורכב יהיה אמיתי).

בשיעור זה ההיגיון ייראה כאלגברה. אולם לא אלגברה רגילה כפי שאולי כבר נתקלת בה. זוהי האלגברה הפשוטה ביותר הקיימת. יש בה אותיות כמו באלגברה המוכרת לך, ולאותיות מתאימים ערכים מספריים; ויש בה חוקי חשבון.

אלא שבניגוד לאלגברה הרגילה, שבה האותיות מייצגות את המספרים הרגילים, אינסוף המספרים החיוביים ואינסוף המספרים השליליים וגם מספרים מסובכים יותר (מספרים מרוכבים למשל), האלגברה של ההיגיון עוסקת אך ורק בשני ערכים: **ערכי האמת** הידועים לנו, ומהם?

אלו הם "אמת" ו"שקר". (באנגלית "TRUE" ו-"FALSE" או בקיצור T ו-F). **האם אתה מכיר ערך אמת נוסף?** למשל הפסוק "עכשיו יום", או שהוא אמיתי או שהוא שקרי. האם ישנה אפשרות שלישית? אין! זה יעשה לנו את החיים קלים.

לעתים מפשטים את האלגברה של ההיגיון ועוסקים בשני ערכים מספריים: 1 (אמת), 0 (שקר). מה יכול להיות יותר פשוט מאלגברה העוסקת בשני מספרים?! דרך אגב, גם המחשבים מבינים רק את המספרים הללו וכל מה שהם יודעים לעשות מבוסס על האלגברה הזאת.



ובכן, איך נראית האלגברה של ההיגיון?
 נייצג טענות או פסוקים שלמים על-ידי אותיות - r, q, p - בלי להתייחס לתוכנם או למבנה שלהם, וניצור מהם צירופים שונים, כפי שמצרפים משפטים בשפה הרגילה על-ידי וו החיבור או על-ידי מלת הקשר "או".
 למשל, p יכול לייצג את הפסוק: "הכלב נובח", ו- q את הפסוק "הכלב מכשכש בזנבו".
 את הפסוק "הכלב נובח ומכשכש בזנבו" נוכל אז לייצג בקיצור על-ידי: " p ו- q ". ואת הפסוק "הכלב נובח או מכשכש בזנבו" על-ידי: " p או q ".

ומה אומר הפסוק הבא: "אם p אז q "?

אבל זוהי עדיין לא אלגברה. בשביל ליצור נוסחאות אנו זקוקים גם לפעולות חשבון. ומה מתאים כאן לפעולות החשבון כמו החיבור והכפל? - אלו הן בדיוק הפעולות המיוצגות על-ידי מלות הקשר "ו", "או" וכו'.

וו החיבור: הקוניונקציה (conjunction)

ראשית, נראה כיצד נייצג את הצירוף של שני פסוקים על-ידי וו החיבור או על-ידי מלת הקשר "וגם". בלוגיקה מציינים את מלת הקשר הזאת על-ידי נקודה (או על-ידי הסימן $\&$). למשל, אם את הפסוק "הכלב נובח" נציין ב- p ואת הפסוק "הכלב מכשכש בזנבו" נציין ב- q , אזי את הצירוף "הכלב נובח ומכשכש בזנבו" נציין על-ידי: $p \& q$ (או $p \& q$). לטענה המורכבת הזאת אנו קוראים **הקוניונקציה** (שמשמעה צירוף) של p ו- q .
 הטענה הבאה יכולה להיות מיוצגת על-ידי קוניונקציה: "ראובן הוא קצב ושמעון הוא ירקן". **מה יהיו שני הפסוקים p ו- q המרכיבים את הקוניונקציה?**
האם לדעתך ניתן לייצג את הטענה הבאה כקוניונקציה: "ראובן ושמעון הם אחים"?

אמנם וו החיבור מופיע בפסוק, אך אין הוא צירוף של שני משפטים פשוטים.

על-ידי הצגת טענות מורכבות בצורה כזאת, ניתן לקשר בין ערכי האמת של הטענה המורכבת לבין ערכי האמת של הטענות המרכיבות.
 כפי שראינו, מציבים במקום כל אות אחד משני הערכים "אמת" או "שקר" (או 1 ו-0).

מה יהיה ערך האמת של $p \& q$ כאשר שני ה"מחוברים" p ו- q אמיתיים?

אם הפסוק "ראובן הוא קצב" הוא אמנם אמיתי והפסוק "שמעון הוא ירקן" גם הוא אמיתי, אזי הקוניונקציה "ראובן הוא קצב ושמעון הוא ירקן" תהיה אמיתית - תקבל את הערך "אמת". כלומר, אם p מקבלת את הערך "אמת" וגם q מקבלת את הערך "אמת" - גם הקוניונקציה $p \& q$ תקבל את הערך "אמת".



ומה אם שני הפסוקים p ו- q שקריים, כלומר ראובן אינו קצב ושמעון אינו ירקון?
אז ברור שהקוניונקציה תהיה שקרית.

ומה אם רק אחד מהפסוקים p או q שקרי?
אם, למשל, ראובן הוא קצב ואולם שמעון אינו ירקון - האם הקוניונקציה "ראובן הוא קצב ושמעון הוא ירקון" אמיתית או שקרית?
תשובה: הקוניונקציה שקרית. וזאת כיוון שהקוניונקציה טוענת שראובן הוא קצב וגם שמעון הוא ירקון, וזה לא נכון.

כאשר אנו טוענים את הטענה המורכבת, אנו מתכוונים שהיא אמיתית כפי שהיא, ואפילו אם רק פרט אחד מהפרטים היוצרים את הקוניונקציה הוא שקרי - הטענה שקרית.

בתורת ההגיון שבה אנו עוסקים אין "חצאי אמיתות"; או שהטענה אמיתית או שהטענה שקרית - אין מקרי ביניים. כבר נתקלנו במקרה דומה: כאשר אנו אומרים "כל התלמידים בבית-הספר עברו את הבחינה בתנ"ך", אזי מספיק שתלמיד אחד מתוך אלף תלמידי בית-הספר לא עבר את הבחינה, בכדי לומר שהטענה שקרית. גם אם רק אחד מתוך מיליון חורג מההכללה, זה הופך אותה לשקרית (לעומת זאת, אם הטענה היא: "הרוב המוחלט של תלמידי בית-הספר עבר את הבחינה בתנ"ך", אזי הטענה אמיתית). אפשר לבטא את הטענה הכוללת כקוניונקציה: במקום לומר כי כל תלמידי בית-הספר עברו את הבחינה, ניקח את הרשימה הכוללת של כל התלמידים ונבטא את הטענה המורכבת: "אביבי עבר את הבחינה ואברהמי עבר את הבחינה ואהרונ עבר את הבחינה..." וכך הלאה עד התלמיד האלף, זו תהיה קוניונקציה בת אלף "מחברים". לקוניונקציה זו אותה המשמעות כמו להכללה. ואז מספיק שמחבר אחד יהיה שקרי בכדי שהקוניונקציה כולה תהיה שקרית.

לסיכום: קוניונקציה היא אמיתית אם כל ה"מחברים" אמיתיים, והיא שקרית בכל מקרה אחר. אם ראובן אינו קצב ושמעון אינו ירקון אז הקוניונקציה שקרית; ואם ראובן הוא אכן קצב אבל שמעון אינו ירקון, הקוניונקציה שקרית; ואם ראובן אינו קצב ושמעון הוא ירקון, גם אז הקוניונקציה שקרית.

את הקשר בין ערכי האמת של p ו- q לבין ערך האמת של $p.q$ נוכל אפוא לבטא כך:

כאשר p אמיתי	ו- q אמיתי,	$p.q$ אמיתי
כאשר p אמיתי	ו- q שקרי,	$p.q$ שקרי
כאשר p שקרי	ו- q אמיתי,	$p.q$ שקרי
כאשר p שקרי	ו- q שקרי,	$p.q$ שקרי

את הקשר בין ערכי האמת של p ו- q לבין ערך האמת של $p.q$ נוכל לבטא על-ידי הטבלה הבאה הקרויה בשם **לוח האמת** של הקוניונקציה.

("א" מציינ אמת ו-"ש" מציינ שקר. p יכול לקבל שני ערכים בלבד: אמת או שקר. וכך גם q .)

מספר האפשרויות לצירוף ערכי-האמת של שתי טענות p, q הוא $2^2 = 4$ = מספר הטענות



p	q	p.q
א	א	א
א	ש	ש
ש	א	ש
ש	ש	ש

ב **לוח האמת**, מופיעות כל האפשרויות של צרופים של ערכי אמת של p ו- q , ולצד כל צירוף מופיע ערך האמת המתאים של $p.q$. לכן ניתן להשתמש בלוח האמת כדי לבחון את תקפותם של טיעונים הכוללים את p , q ו- $p.q$. נראה בהמשך כיצד עושים זאת. טיעון תקף אם לא ייתכן שמסקנתו תהייה שקרית אם נתון שכל ההקדמות הן אמיתיות.

ובכן, הגדרנו את "**פעולת החשבון**" הראשונה ב**אלגברה של ההיגיון**. פעולה זו יוצרת פסוק חדש מתוך שני פסוקים.

אולם יש גם פעולת חשבון הפועלת על מספר אחד; זוהי הפעולה המשנה את הסימן של המספר. **איזו פעולה היא זאת?**

תשובה: כאשר שמים את הסימן מינוס (-) לפני מספר רגיל, סימנו משתנה: אם הוא היה חיובי הוא הופך לשלילי ולהיפך. באלגברת ההיגיון ישנה פעולה דומה - זוהי פעולת השלילה.

השלילה

הטענה ש"אין זה נכון ש- p " או ש"שקר הדבר ש- p " או בקיצור "לא p " קרויה: **השלילה** של p , ומציינים אותה ב- " $\sim p$ ".

מהו לוח האמת של $\sim p$?

נניח ש- p היא הטענה: "חגית איחרה לשיעור" ואז $\sim p$ היא הטענה: "אין זה נכון שחגית איחרה לשיעור", או בפשטות: "חגית לא איחרה לשיעור". אם הטענה הראשונה אמיתית אזי הטענה השנייה שקרית ולהיפך.

את הקשר בין ערכי האמת של p לבין ערכי האמת של $\sim p$ נוכל לבטא על-ידי הטבלה הבאה הקרויה בשם **לוח האמת** של השלילה:

p	$\sim p$
א	ש
ש	א

ק יכול לקבל שני ערכים בלבד: אמת או שקר. ולכן לוח האמת נותן את כל האפשרויות של ערכי ק והערכים המתאימים של $\sim p$.

כפי שהסימן מינוס (-) משנה את הסימן של מספר רגיל, כך משנה פעולת השלילה את ערך האמת.

או-כולל: הדיסיונקציה (disjunction)

את הצירוף "ק או q", כאשר ה"או" הוא כולל או לא-מוציא מציינים ב- $p \vee q$ (כאשר ה-"v" שבין האותיות קרוי בשם "טריז").

אם הטענה ק היא: "דרור דיבר בזמן הבחינה", ו-q היא: "דרור העתיק בבחינה", אזי $p \vee q$ היא הטענה: "דרור דיבר בבחינה או דרור העתיק בבחינה" ובקיצור: "דרור דיבר או העתיק בבחינה". זו יכולה להיות התשובה לשאלה: "מדוע נפסלה בחינתו של דרור?".

הצירוף $p \vee q$ קרוי בשם **דיסיונקציה**.
נסה לערוך בעצמך את לוח האמת של הדיסיונקציה.

אם דרור דיבר	(p אמת)	והעתיק	(q אמת)	אז בוודאי שדרור דיבר או העתיק	(p ∨ q אמת)
אם דרור דיבר	(p אמת)	ולא העתיק	(q שקר)	אז דרור דיבר או העתיק.	(p ∨ q אמת)
אם דרור לא דיבר	(p שקר)	והעתיק	(q אמת)	אז דרור דיבר או העתיק.	(p ∨ q אמת)

בכל שלושת המקרים הנ"ל הדיסיונקציה אמיתית. ומתי היא שקרית?

תשובה: כאשר דרור לא דיבר ולא העתיק. ואז בחינתו לא צריכה להיפסל.

כלומר, הדיסיונקציה אמיתית פרט למקרה שבו גם p וגם q שקריות.

כזכור, מספר האפשרויות לצירוף ערכי-האמת של שתי טענות p, q הוא $2^2 = 4$ מספר הטענות

לוח האמת של הדיסיונקציה הוא אפוא:

p	q	p ∨ q
א	א	א
א	ש	א
ש	א	א
ש	ש	ש

ב **לוח האמת**, מופיעות כל האפשרויות של צרופים של ערכי אמת של p ו-q, ולצד כל צירוף



מופיע ערך האמת המתאים של $p \vee q$. לכן ניתן להשתמש בלוח האמת כדי לבחון את תקפותם של טיעונים הכוללים את p , q ו- $p \vee q$. נראה בהמשך כיצד עושים זאת.

נוכל כעת לבטא את **היקש הבררה** שהיצגנו בתחילת השיעור הקודם (שיעור 12) בשפת האלגברה של ההיגיון. את היקש הבררה:
או ששמעון זו הצדה או ששמעון ייפגע ממכונית;
שמעון לא זו הצדה;
לכן שמעון ייפגע ממכונית.

נבטא בצורה הבאה:

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$

הקו בא לציין שמתחתיו באה המסקנה, דהיינו - הוא בא במקום המלה "לכן". זהו טיעון בעל דפוס של היקש הבררה.

באחד השיעורים הקודמים ראינו שניתן להוכיח, בשיטת ההצבה, שדפוס טיעון אינו תקף אולם אי אפשר להוכיח בעזרתה שהוא אכן תקף - **אתם זוכרים למה?**
תשובה: כי אם לא מצאנו דוגמת הצבה שבה ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית, אין זו עדיין הוכחה; תמיד יוותרו הצבות אפשריות רבות שלא ניסינו אותן עדיין.

כעת נראה, שבאמצעות לוחות אמת, ניתן גם **להוכיח שטיעון הוא תקף**.
זאת ניתן לעשות בדרך הבאה:

על מנת להוכיח שדפוס הטיעון הנ"ל תקף, עורכים לוח אמת ובו טורים של ערכי האמת של p , q , $\sim p$ ו- $p \vee q$. **אם בכל מקרה שבו שתי ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית** - **הטיעון יהיה תקף**.

	$p \vee q$	$\sim p$	q	p
(רק הקדמה אחת אמיתית והמסקנה אמיתית)	א	ש	א	א
(רק הקדמה אחת אמיתית והמסקנה שקרית)	א	ש	ש	א
(כל ההקדמות אמיתיות והמסקנה אמיתית)	א	א	א	ש
(רק הקדמה אחת אמיתית והמסקנה שקרית)	ש	א	ש	ש
	↑	↑	↑	
	1ה	2ה	מס	

1ה, 2ה ו-מס מציינים את העמודות המתאימות להקדמה הראשונה, השנייה ולמסקנה, בהתאמה.

הטור הרביעי (תמיד נספור את הטורים מימין לשמאל) מתאים להקדמה הראשונה של הטיעון, הטור השלישי מתאים להקדמה השנייה והטור השני - למסקנה. בלוח האמת מופיעים כל הצרופים האפשריים של ערכי אמת של ההקדמות ושל המסקנה. בכל השורות שבהן ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית. (במקרה זה יש רק שורה אחת כזאת - השורה השלישית). אין בלוח שום שורה שבה ההקדמות אמיתיות והמסקנה אינה אמיתית. מכאן שהטיעון תקף.

אם בכל מקרה שבו שתי ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית - הטיעון תקף. וזה כבר מייצג את כל ההצבות האפשריות. - **מדוע?**

תשובה: כי אנו מתעניינים רק בערכי האמת של ההצבות. וכל הצרופים האפשריים של ערכי האמת מופיעים בלוח האמת. כל הצבה תתאים לאחת מארבע השורות של לוח האמת.

יש לחזור ולהדגיש כי מספר האפשרויות לצירוף ערכי האמת של שתי טענות p, q הוא $2^2 = 4$ = מספר הטענות; ואלו הן כל האפשרויות הקיימות, וזהו גם, כמובן, מספר השורות בלוח האמת. צריך לבדוק שבכל שורה שבה שתי ההקדמות אמיתיות - גם המסקנה אמיתית, ואז הטיעון הגיוני. אם יש שורה, ולו גם אחת, שבה אין זה נכון - הטיעון כולו אינו תקף.

למשל, ניקח את ההצבה הבאה:
 p : בן גוריון היה ראש ממשלה;
 q : ביאליק היה ראש ממשלה;

הצב בהיקש הבררה. לאיזו שורה מארבע השורות של לוח האמת תתאים הצבה זו?

לשורה השנייה כמובן. שורה זו מתאימה להקדמה ראשונה אמיתית ושנייה שקרית. ניקח כעת את ההצבה ההפוכה - כאשר האותיות p ו- q מחליפות תפקידים. **לאיזו שורה תתאים הצבה זו?** - לשורה השלישית. בשורה הזאת שתי ההקדמות אמיתיות וגם המסקנה אמיתית.

בכל הצבה שהיא של דפוס טיעון זה, נקבל תמיד שאם שתי ההקדמות אמיתיות, גם המסקנה אמיתית. גם אם נחפש מתחת לאדמה, לא נמצא הצבה שבה שתי ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית.

ישנה רק שורה אחת בה שתי ההקדמות אמיתיות - זוהי השורה השלישית, ובה ערך האמת בטור של q - הוא א. ובכך הוכחנו שהטיעון תקף.

הוכח בעזרת אותה שיטה שהטיעון הבא אינו תקף:
או ששמעון זו הצדה או ששמעון ייפגע מהמכונית;
שמעון זו הצדה;
לכן שמעון לא ייפגע מהמכונית.



ההוכחה:

דפוס הטיעון הוא:

$p \vee q$

p

q

ערוך כעת את לוח האמת המתאים.
חשוב רגע - הרי ניתן להשתמש בלוח האמת הקודם, כאשר הפעם טורים אחרים מייצגים את ההקדמות.
אילו טורים הם אלה?

תשובה: הטורים הרביעי והראשון מייצגים את ההקדמה הראשונה והשנייה בהתאמה, ואילו הטור השני מייצג גם כאן את המסקנה.

יש כאן שתי שורות שבהן שתי ההקדמות אמיתיות. אילו שורות הן אלה?
 אלו הן השורות הראשונה והשנייה.

ובכן, האם הטיעון תקף?

תשובה: בשורה הראשונה ההקדמות אמיתיות וגם המסקנה אמיתית, אולם בשורה השנייה ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית. הגדרנו **טיעון תקף** כטיעון שבו **בכל מקרה שבו שתי ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית**. ולכן במקרה שלנו גם דפוס הטיעון, וגם הטיעון, אינם תקפים!

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

ערך-אמת

וו החיבור - הקוניונקציה

לוח האמת

פעולת חשבון באלגברה של ההיגיון

השלילה

או כולל - הדיסיונקציה, טריז

איך להוכיח שטיעון הוא תקף (באמצעות לוח האמת)

