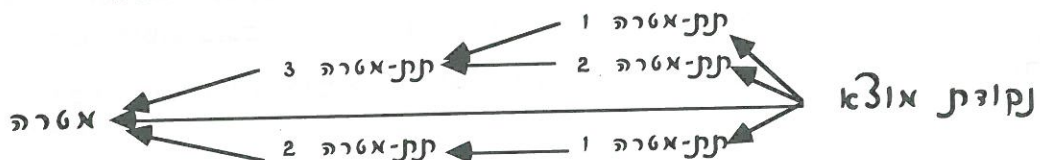


פרק 11: פירוק לשלבים של תהליך פתרון הבעיות

כלי החשיבה שנעסוק בו בפרק זה הוא **פירוק לשלבים של תהליך הפתרון**. פרק זה מהווה השלמה ופירוט לפרק 6 (מיפוי הבעיה). בעזרת מארגן החשיבה הגרפי חילקנו למעשה את פתרון הבעיה לשלבים. היתרון של החשיבה בשלבים הוא שבכל שלב ושלב מתרכז החושב במשימת החשיבה המוגדרת על-ידי אותו שלב, במקום להיסחף מרעיון לרעיון. הדבר מפשט את החשיבה בכך שהוא מסיר את המורכבות ואת הבלבול מהחשיבה; ללא חלוקת החשיבה לשלבים הכול נוחת בבת-אחת על החושב והוא מרגיש שכל ההיבטים של משימת החשיבה מכריעים אותו. כתוצאה מכך החושב בוחר בדרך הקלה – אינו מתעמק בבעיה וחושב עליה בצורה שגרתית ושטחית.

לאחר שלבי מיפוי הבעיה, כלומר לאחר שמבינים את הנתונים והתנאים של הבעיה ומבינים מהי המטרה, מגיע שלב תכנון הפתרון והפתרון. כמובן, חשיבות שלב זה עולה ככל שהבעיה מורכבת ומסובכת יותר. כדי לבצע את הפתרון דרושות שתי מיומנויות (השימוש בהן אינו בהכרח על-פי הסדר המצוין להלן):
(א) לדעת לייצג בדרך אלגברית את הגורמים המבוטאים ב"סיפור" (ראו פרקים 8 ו-9).
(ב) לדעת להגדיר תת-מטרות או שלבים בפתרון הבעיה. בדרך כלל יש דרכים אחדות (חלופיות) כדי להגיע אל המטרה, וכדאי לשקול איזו מהן טובה יותר. בזאת נעסוק בפרק זה.

דרכים שונות (חלופיות) שבהן ניתן להגיע מנקודת המוצא אל המטרה



כאן יש מקום לדיון קצר על בעיות בחיי יום-יום שניתן לפתור בעזרת חלוקתן לתת-בעיות. למשל, חלוקת העבודה כשלומדים למבחן, החזרת חוב בשלבים, תכנון משימה בשלבים וכדומה.



1. להיות מודעים לצורך להגדיר תת-מטרות לפתרון בעיה. עלינו להיות מודעים לצורך להחליט מהם הצעדים שנקוט כדי להגיע לפתרון, ובאיזה סדר. בבעיות מסובכות התכנון דורש חלוקה של הבעיה לחלקים, או חלוקתה לתת-בעיות – החלפת בעיה אחת קשה ומורכבת בשתי בעיות או יותר, קלות, מוכרות ופשוטות. אם אתם יודעים לפתור את תת-הבעיות, או שהן דומות לבעיות שכבר פתרתם, יהיה לכם קל יותר לפתור אותן מאשר את הבעיה הסבוכה.

2. **ללמוד להגדיר תת-מטרות לפתרון בעיה.** הגדרת תת-מטרות ופירוק הפתרון לשלבים תלוי בבעיה עצמה. לעתים ניתן לנקוט בדרכים אחדות להגדרת שלבי הפתרון וסדר הפעלתם.

להלן מספר דרכים לקביעת תת-מטרות:

א. לבטא גדלים המוזכרים בבעיה בעזרת הנתונים, התנאים והקשרים הידועים, ולהשתמש בהם כדי למצוא את המטרה (הגדלים המבוקשים בבעיה). ראו דוגמאות 1-2 להלן.

פתרון של מרבית הבעיות במתמטיקה בנוי על הגישה המבוססת על הגדרת תת-מטרות. במקום למצוא מיד את ערך הכמות הבלתי-ידועה (מטרת הבעיה), מגדירים תת-מטרות הכוללות קביעת כמויות בלתי-ידועות אחרות הקשורות לכמות המבוקשת בקשר ידוע. לאחר שנקבעו כל הכמויות האחרות, או לאחר שידועים כיצד לבטא אותם בעזרת יחסים נתונים, משתמשים בקשר הידוע כדי למצוא את הכמות המבוקשת.

ב. להגדיר תת-מטרות לפתרון ואת סדר ביצוען. ראו דוגמאות 3-4 להלן.

הדבר דומה לתכנון טיול: אם עליכם להגיע מירושלים לנהריה, ייתכן שיש אוטובוס ישיר, ואז עליכם לפתור את הבעיה הנוגעת לנסיעה באוטובוס זה – לוח זמנים, מחיר, הרציף שבו עומד האוטובוס, איך מגיעים לתחנה המרכזית וכד'. אבל אם אין אוטובוס ישיר – תצטרכו לחלק את המטרה לתת-מטרות. למשל, להגיע לתל-אביב במונית, משם לחיפה ברכבת ומשם לנהריה באוטובוס.

ג. להגדיר צעדים לפתרון מן הסוף להתחלה. ראו דוגמאות 5-6 להלן.

הדבר דומה לתכנון הבא: נניח שאתם צריכים להגיע מירושלים לנהריה, ואינכם יודעים כיצד לעשות זאת, אבל אתם יודעים כיצד להגיע מחיפה לנהריה. אתם אומרים לעצמכם: "אם רק אדע כיצד להגיע לחיפה, תהיה בעצם בעייתי פתורה, כי שלב ההגעה מחיפה לנהריה כבר פתור" באופן דומה, ואם תדעו איך להגיע מתל-אביב לחיפה, תישאר בעצם רק תת-הבעיה כיצד להגיע מירושלים לתל-אביב.

ד. לחפש בעיה מוכרת פשוטה וקלה שמזכירה את הבעיה הנתונה, ואז לנסות לעבור ממנה אל הבעיה הנתונה. ראו דוגמה 7 להלן.

עבודה על דוגמאות בתיווך מורה

א. לבטא גדלים, תנאים ויחסים המוזכרים בבעיה

דוגמה 1

כל תלמידי כיתות ט' יצאו לטיול. לפני היציאה הם נערכו למסדר, והסתדרו ב-20 שורות שוות. לקראת מסדר הסיום הם נערכו כך שלכל שורה נוספו שני תלמידים, ולכן מספר השורות השוות קטן ב-5. כמה תלמידים יצאו לטיול?

נסו למפות את הבעיה ולהגדיר את השלבים שתנקטו לשם פתרונה. אחר חיזרו לקרוא.

זוהי בעיה קלה, אך גם לשם פתרונה יש לבטא בתחילה את הגדלים ואת היחסים ביניהם. נחשוב על שלבים אפשריים.

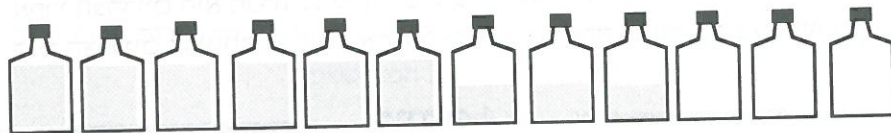
נניח שהשתתפו בטיול x תלמידים:

1. ראשית יש לבטא בעזרת x את מספר התלמידים בכל שורה במסדר הפתיחה.
 2. אחר כך יש לבטא בעזרת הביטוי הקודם את מספר התלמידים בכל שורה במסדר הסיום.
 3. אחר כך יש להשתמש בביטוי הקודם כדי לבטא את מספר התלמידים שהשתתפו במסדר הסיום.
 4. ואז בונים משוואה ומשלימים את הפתרון.
- נסו לבצע את השלבים על-פי הסדר שציינו.

$$\begin{array}{l} 1. \quad x/20 \\ 2. \quad x/20+2 \\ 3. \quad (x/20+2) \cdot 15 \\ 4. \quad x = (x/20+2) \cdot 15 \\ 5. \quad \{x=120\} \end{array}$$

דוגמה 2

משקל בקבוק מלא נוזל (כולל משקל הבקבוק עצמו) הוא 1 ק"ג. על השולחן 12 בקבוקים, מהם 6 מלאים, 3 מלאים עד מחציתם ו-3 ריקים. המשקל הכולל הוא 9.3 ק"ג.



מהו משקל הנוזל בבקבוק מלא?

נסו למפות את הבעיה ולהגדיר את השלבים שתנקטו לשם פתרונה. אחר חיזרו לקרוא.

נניח שמשקל הנוזל (בלבד) בבקבוק מלא הוא x ק"ג:

1. ראשית יש לבטא בעזרת x את משקלו של הבקבוק עצמו (המשקל טרה, משקל האריזה בלבד).
2. אחר כך יש לבטא בעזרת הביטוי הקודם את משקל שלושת הבקבוקים הריקים.
3. אחר כך יש לבטא בעזרת הביטויים הקודמים את משקלו של בקבוק מלא למחצה.
4. אחר כך יש להשתמש בביטוי הקודם כדי לבטא את משקל שלושת הבקבוקים המלאים למחצה.
5. ואז בונים משוואה המבטאת את המשקל הכולל ומשלימים את הפתרון.

נסו לבצע את השלבים על-פי הסדר שציינו.

$$\begin{array}{l} \text{משקל הנוזל באחד הבקבוקים המלאים: } 9.0 \\ \text{משקל הבקבוק} \quad \{9.0=x\} \\ \text{משקל שלושת הבקבוקים המלאים} \quad 3 \cdot 6 = (x \cdot 3 - 3) + (x \cdot 5 \cdot 1 - 3) + 9 \\ \text{משקל שלושת הבקבוקים המלאים למחצה} \quad x \cdot 5 \cdot 1 - 3 = (x \cdot 5 \cdot 0 - 1) \cdot 3 \\ \text{משקל אחד הבקבוקים המלאים} \quad x \cdot 5 \cdot 0 - 1 = x \cdot 5 \cdot 0 + (x - 1) \\ \text{משקל שלושת הבקבוקים המלאים} \quad x \cdot 3 - 3 = (x - 1) \cdot 3 \\ \text{משקל הנוזל באחד הבקבוקים} \quad x - 1 \end{array}$$

ב. להגדיר תת-מטרות לפתרון ואת סדר ביצוען

דוגמה 3

נילי הביאה עוגות שאפתה למכירה במרכז השכונה. לפני הצהריים מכרה כל עוגה ב-3 ש"ח, והרוויחה 18 ש"ח. אחרי הצהריים הורידה את המחיר ל-2 ש"ח לעוגה, ומכרה פי שניים מאשר לפני הצהריים. כמה הרוויחה במשך היום?

נסו להגדיר את השלבים שתנקטו לשם פתרון הבעיה. אחר חיזור לקרוא.

- תת-מטרה 1: למצוא כמה עוגות מכרה נילי לפני הצהריים.
- תת-מטרה 2: למצוא כמה עוגות מכרה נילי אחרי הצהריים.
- תת-מטרה 3: למצוא כמה הרוויחה נילי אחרי הצהריים.
- מטרה סופית: למצוא כמה הרוויחה נילי במשך כל היום.

ביצוע:

- תת-בעיה 1: נילי הרוויחה 18 ש"ח, ומחיר כל עוגה 3 ש"ח, מכאן שמכרה 6 עוגות.
- תת-בעיה 2: אחרי הצהריים היא מכרה פי 2, מכאן שמכרה 12 עוגות.
- תת-בעיה 3: אחרי הצהריים היא מכרה 12 עוגות, ב-2 ש"ח לעוגה, מכאן שהרוויחה 24 ש"ח.
- הבעיה כולה: לפני הצהריים הרוויחה 18 ש"ח, אחרי הצהריים הרוויחה 24 ש"ח. במשך היום הרוויחה 42 ש"ח.

דוגמה 4

נהג עבר בדרכו מחיפה לתל-אביב ליד אבן דרך המציינת את המרחק בקילומטרים. (המידה מתחילה בחיפה).

אחרי עוד שעה וחצי של נסיעה עבר ליד אבן דרך אחרת, שעליה היה מצוין מספר שספרותיו זהות לספרות המספר הקודם, אך בסדר הפוך.

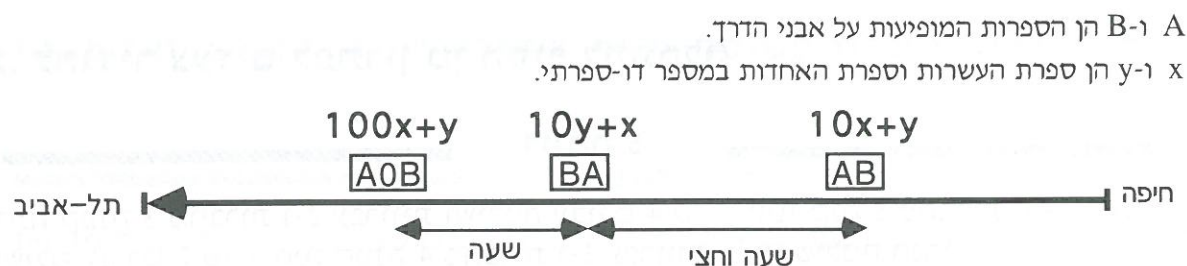
אחרי עוד שעה עבר ליד אבן נוספת שעליה צוין מספר דומה למספר הראשון, אלא שנוסף לו אפס (0) בין ספרותיו. מהי מהירות המכונית?

זוהי בעיה קשה. פירוק הפתרון לשלבים מקל מאוד על הפתרון. נסו לפתור את הבעיה ואחר חיזור לקרוא.

מיפוי הבעיה (מחשבות וניסוח):

זוהי בעיית זרימה.

יש לי נתונים על קטעי דרך והצאנא שצורשו למכונית לטבור קטעים אלה. יש להניח שאחידות האכונות קבועה לאורך כל הדרך, ולכן גם בקטעים אלה. אם אמצא אהם קטעי הדרך אדע לאמצא את האחידות הנסיעה נאשכה למעלה אשתת'ים וחצי. נניח שאבן הדרך הראשונה הראתה מספר דו-ספרתי. אחרי שעה וחצי הראתה אבן הדרך השנייה מספר הכתוב באותן ספרות בסדר הפוך, ואחרי שעה נוספת הראתה אבן הדרך השלישית מספר תלת ספרתי שספרות האמצות שלו היא ספרות האמצות של המספר הראשון, ספרות העשרות שלו היא 0, וספרות האלף היא ספרות העשרות של המספר הראשון. אעזר בשרטוט:



תכנון שלבים לפתרון:

- (א) לבטא את המספרים המוזכרים בסיפור בעזרת שתי הספרות.
1. לבטא את המספר הדו-ספרתי באמצעות ספרותיו (המספר הרשום על אבן הדרך הראשונה).
 2. לבטא את המספר השני, עם סדר הספרות ההפוך (המספר הרשום על אבן הדרך השנייה).
 3. לבטא את המספר השלישי, עם ה-0 באמצע (המספר הרשום על אבן הדרך השלישית).
- (ב) לבטא קשרים בין הגדלים האלה. ראשית נבטא את המרחקים המצוינים. אז נשתמש בקשר: $v=s/t$.
4. לבטא את ההפרש בין המספר השני והראשון (הדרך בשעה וחצי).
 5. לחלק את הביטוי ב-1.5 (הזמן) כדי לבטא את המהירות.
 6. לבטא שוב את המהירות בעזרת ההפרש בין המספר השלישי והשני (הדרך בשעה, מחולקת בזמן, ב-1).
 7. לבנות משוואה שבה משווים את הביטויים השונים של המהירות.
- ברור שאקבל משוואה עם שני משתנים, המבטאת קשר בין שתי הספרות, וכדי לפתור את הבעיה, כלומר, כדי לקבל פתרון יחיד למשוואה, אצטרך להשתמש בידעיה שהספרות הן מספרים שלמים.
- (ג) לפתור את המשוואה ולמצוא את המטרה (המהירות המבוקשת).
8. לקבוע מהן הספרות, ומה היה כתוב על כל אבן דרך.
 9. לחשב את המהירות.
- הערה: במקום שלבים 4 ו-5 אפשר לבטא את ההפרש בין המספר השלישי והראשון. גם זה ייתן את הדרך בשעות וחצי. האם ישדרך נוספת?

ביצוע השלבים:

1. $10x+y$ (אבן הדרך הראשונה).
2. $10y+x$ (אבן הדרך השנייה).
3. $100x+y$ (אבן הדרך השלישית).
4. $10y+x-(10x+y)=-9x+9y$ (הדרך בשעה וחצי).
5. $(9x+9y)/1.5=6x+6y$ (המהירות).
6. $100x+y-(10y+x)=99x-9y$ (הדרך בשעה).
7. $-6x+6y=99x-9y$
8. $15y=105x$
9. $y=7x$
8. היות ושתי הספרות הן מספרים שלמים, האפשרות היחידה היא ש- $x=1$, $y=7$.
9. על אבן הדרך הראשונה היה כתוב 17, על האבן השנייה היה כתוב 71, ועל האבן השלישית היה כתוב 107.
- אימות: בשעה וחצי עברה המכונית $71-17=54$ ק"מ, אחרי שעה נוספת $107-71=36$. ואכן $54=1.5 \cdot 36$.
10. המהירות היא הדרך שהמכונית עוברת בשעה, כלומר 36 קמ"ש.

ג. להגדיר צעדים לפתרון מן הסוף להתחלה

דוגמה 5

רינה קנתה 3 מחברות ו-2 עפרונות ושילמה עבורם 4 ש"ח. יוסי קנה 5 מחברות ו-4 עפרונות ושילם עבורם 7 ש"ח. חנה קנתה 4 מחברות ו-3 עפרונות. כמה שילמה חנה?

נסו לפתור את הבעיה ואחר חיזרו לקרוא.

- תת-מטרה 1: אילו ידעתי כמה עולה מחברת אחת וכמה עולה עיפרון אחד, הייתי כופל מחיר מחברת ב-4, כופל מחיר עיפרון ב-3, מחבר את שתי המכפלות, ויודע כמה חנה שילמה.
- תת-מטרה 2: יש להשתמש בדרך הראשונה לקביעת תת-מטרות (לבטא גדלים ויחסים המתוארים בשני המשפטים הראשונים של הבעיה) כדי למצוא את הדרוש לתת-מטרה 1.
- זה כולל קביעת שני נעלמים (מחיר מחברת ומחיר עיפרון), בניית שתי משוואות, ומציאת קבוצת האמת של המשוואות.

דוגמה 6

היקפו של מלבן $2m$ ואורכו n .
מה שטחו של ריבוע שצלעו שווה לרוחב המלבן?

נסו לפתור את הבעיה ואחר חיזרו לקרוא.

- תת-מטרה 1: אילו ידעתי מה רוחב המלבן, הייתי מכפיל את הרוחב בעצמו ויודע מהו שטח הריבוע.
- תת-מטרה 2: להשתמש בדרך הראשונה (לבטא גדלים ויחסים המתוארים בשני הנתונים הראשונים של הבעיה) כדי למצוא את הדרוש לתת-מטרה 1.
- זה כולל קביעת נעלם (רוחב המלבן), בניית תבנית מספר שתבטא את היחס בין אורך ורוחב המלבן לבין היקפו, ובניית המשוואה שתתאר את שטח הריבוע.

ביצוע:

תת-מטרה 1:



מהי צלע הריבוע x ? אם נדע זאת נדע את השטח המבוקש שהוא ריבוע הצלע, כלומר x^2 .

תת-מטרה 2: חצי של היקף המלבן, m , הוא בעצם סכום האורך והרוחב, כלומר,

$$x+m=n, \text{ כלומר } x=m-n, \text{ ולכן } x^2=(m-n)^2$$

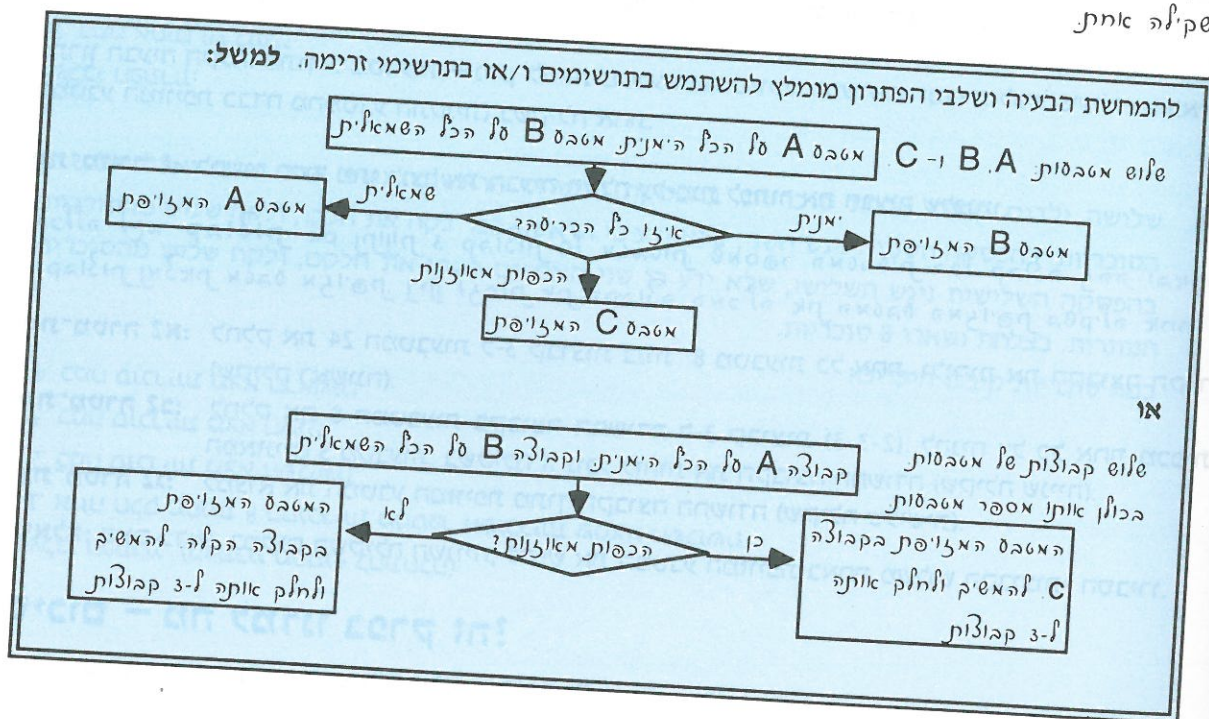
ד. לחפש בעיה מוכרת פשוטה וקלה שמזכירה את הבעיה, ואז לעבור ממנה אל הבעיה

דוגמה 7

לפניכם ערימה של 24 מטבעות הנראות זהות, אבל ידוע לכם שאחת מתוך המטבעות מזויפת, וקלה יותר משאר 23 המטבעות התקינות. עליכם לזהות את המטבע הקלה בעזרת מאזני כף ובמספר הקטן ביותר של שקילות. נסו לפתור את הבעיה ואחר חיזורו לקרוא.

תת-מטרה 1: למצוא בעיה פשוטה וקלה המזכירה את הבעיה.

הבעיה הפשוטה יותר שסולה בדעתך:
אתה כזה אדם שאתה יכול לזהות מטבע מזויפת בשקילה אחת בלבד? ניסוח אחר: נתונות מספר מטבעות כולם, פרט לאחת, באשקל זהה. האחת קלה מהאחרות. לזהות את המטבע המזויפת בשקילה אחת בלבד בעזרת מאזני כף.
ברור שאם יש לי 2 מטבעות אוכל בשקילה אחת לזהות את הקלה - זו שלא תכריע את כל המאזניים.
במצב, גם אם יש לי 3 מטבעות שאחת מהן קלה, אוכל לזהות אותה בשקילה אחת: אושם מטבע אחד על כל מאזניים. אם אחת מהן תכריע, הרי שהמטבע הקלה היא זו האומת על הכל האחרת. אם הכפות תהיינה מאוזנות - ברור שהמזויפת היא המטבע השלישית.
ואם היה עלי לזהות את המטבע הקלה מבין 4 מטבעות חשבת ודגעת? למסקנה שלא אוכל להסתפק בשקילה אחת.



נתונים:

1. שלוש מטבעות שוות לכאורה



2. מאזני כף

3. המטבע המזויפת קלה ממטבע תקינה.

4. נתון סמוי: אם שוקלים רק שתי מטבעות, ניתן להסיק מכך על המטבע השלישית.

שקילה:

שתי מטבעות מתוך השלוש.



המטבע השלישית:

תוצאות אפשריות:



המטבע השמאלית מזויפת



המטבע הימנית מזויפת



המטבע השלישית מזויפת

פתרון הבעיה הקלה: מתוך 3 מטבעות – ניתן לזהות מטבע אחת מזויפת (השיטה הנזכרת לעיל פועלת גם כאשר המטבע המזויפת כבדה מהמטבע התקנית) בשקילה אחת.

תת-מטרה 2: לחשוב כיצד ניתן לנצל את הבעיה הקלה על-מנת לפתור את הבעיה שלפנינו.

הכללה לגבי קבוצות: אם נתונות 3 קבוצות של מטבעות שאספר המטבעות בכל קבוצה זהה ואחת הקבוצות נמצאת אטום מזויפת, ניתן לזהות את הקבוצה האכילה את המטבע המזויפת בשקילה אחת.

תת-מטרה 2א: לחלק את 24 המטבעות ל-3 קבוצות בנות 8 מטבעות כל אחת, ולזהות את הקבוצה הקלה (שקילה ראשונה).

תת-מטרה 2ב: לחלק את 8 המטבעות בקבוצה החשודה ל-3 קבוצות (2-3-3). להניח על כל אחת מכפות המאזניים 3 מטבעות. בשקילה זו נוכל לזהות את הקבוצה החשודה (שקילה שנייה).

תת-מטרה 2ג: למצוא את המטבע המזויפת מתוך הקבוצה החשודה (שקילה שלישית).

שאלה: האם כדאי, במקום השקילה השנייה, לחפש את המטבע המזויפת באחת משלוש הקבוצות? הסבירו.

סיכום – מה למדנו בפרק זה?

סכמו בכיתה מהם הדברים החשובים שלמדנו בפרק זה.