

## פרק 12: המצאת בעיות מילוליות

כלי החשיבה שנעסוק בו בפרק זה הוא **כתיבת בעיות**.

זהו כלי החשיבה האחרון שאנו מציגים במבנית זו. **כתיבת בעיות** הוא כלי חזק, ומבחינות אחדות (ראו להלן מטרות 1-7) ניתן היה להציג אותו במקומות שונים לאורך המבנית, והלומדים היו מפיקים ממנו תועלת רבה. אולם כוחו של הכלי מתעצם כאשר הוא משלב את כל מה שנלמד עד כה, ונותן אפשרות לחשיבה על דרך החשיבה שלנו לאורך כל המבנית. לכן אנו מציגים אותו בסוף המבנית. העבודה על פרק זה תיעשה בזוגות: כל אחד מבני-הזוג מחבר בעיה לפי הנתונים, ומציג אותה בפני בן-זוגו שצריך לפתור אותה. אם בן-הזוג נתקל בקשיים, מחבר הבעיה יעזור לו להתגבר עליהם.

כאן כדאי לשאול את התלמידים אילו יתרונות הם רואים בהמצאת בעיות מילוליות, ואז לפתח דיון.



1. **לפתח חשיבה רב-כיוונית והסתכלות רחבה ומלאה יותר.** כאשר עליכם לפתור בעיה נתונה, אתם חושבים, בדרך-כלל, בכיוון אחד מסוים. כאשר עליכם להמציא בעיה אתם חושבים בכיוונים רבים: איך נראים הדברים מן הכיוון ההפוך, מכיוון המחבר? מה אומרים לי הנתונים? על איזה מצב מדובר? מה זה מזכיר לי? איזה שאלות אפשר לשאול? האם השאלות הגיוניות? האם צריך גם להמציא נתונים? האם אפשר לשאול שאלות נוספות? האם אפשר לשאול שאלות מעניינות יותר?
2. **לדעת לכתוב כמו קורא ולקרוא כמו כותב.** כאשר מדובר באוריינות – ידיעת קרוא וכתוב – אנו מצפים שאדם יידע לכתוב כמו קורא ולקרוא כמו כותב. קיימים יחסי גומלין בין קריאה וכתובה: מי שמרבה לקרוא כותב אחרת ממי שאינו קורא – אוצר המלים שלו רחב יותר, הבנתו רחבה יותר ועוד. מי שכותב (סופר, משורר, עיתונאי) קריאתו תהיה אחרת. הוא יהיה ביקורתי יותר בקריאה, יידע להבין משפטים מורכבים, יבין דבר מתוך דבר; מי שחיבר בעיות במתמטיקה מסתכל אחרת על בעיות שמוצגות לו. כשם שעיסוק בקריאה ובכתיבה עוזר לבסס את ההבנה, את ראיית הקשרים בין החלקים השונים של המשפטים ובין המשפטים עצמם, כך עיסוק בקריאה ובכתיבה של בעיות מילוליות במתמטיקה עוזר לבסס את ההבנה. אדם שמנסח בעיה חייב להבין מה הוא כותב, וקורא שוב את מה שכתב כדי לראות אם הדברים אכן מובנים לזולתו. הכותב חייב להבהיר את עצמו ובכך גם מבהיר לעצמו דברים ומבססם.
3. **כתיבת בעיות עוזרת להבין טוב יותר דברים של אחרים.** אחרי שתעברו לבדכם את החוויה – אם תתרגמו סימנים, טבלות, או תרשימים למילים – תבינו טוב יותר מילים (ובעיות) שכתבו אחרים.

4. **כתיבת בעיות עוזרת להבין טוב יותר את השאלות שניתן לשאול ולדעת לענות עליהן.** לדוגמה, נניח שאתם רוצים להמציא בעיה הקשורה במשולש, ואתם מחליטים שהמשולש יהיה שווה שוקיים, ואורך בסיסו וצלעו ידועים. אז תשאלו את עצמכם: אילו שאלות עולות במוחי כאשר אני שומע את המילה **משולש**? "האם הנתונים מספיקים כדי לדעת מהו ההיקף?", "האם אפשר לדעת מהן הזוויות?", "מהו השטח?". יש להניח שתשרטטו משולש ותסמנו עליו את הידוע לכם. ברגע שתחליטו מהי השאלה שניתן לשאול לאור הנתונים, ותנסחו אותה, אז גם תבינו אותה היטב ותדעו כיצד ניתן לפתור אותה (למשל, למצוא את ההיקף).

5. **שאלת שאלות דורשת הפעלת כלי חשיבה כלליים.** כששואלים שאלה לומדים להפעיל כלי חשיבה כלליים שמופעלים לאו דווקא במתמטיקה, כמו מציאת הדומה והשונה, בחינת מהימנות של מקורות מידע, מציאת קשר בין נתונים, מציאת השלכות של דברים, דרכים לקבלת החלטות, קבלת אחריות לשלמות משימה שמבצעים.

6. **פיתוח חשיבה בונה ויצירתית.**

7. **העבודה בזוגות על פרק זה עוזרת להטמעת החומר.** הטמעת החומר נעשיית בשתי דרכים: (א) אין דבר שמבהיר נושא מסוים יותר מאשר הצורך להסביר אותו למישהו אחר; (ב) אם שני בני-הזוג כתבו בעיות שונות, הם רואים שניתן לראות את אותם הנתונים באור שונה, מה שתורם להרחבת ראייתם.

8. **יישום הידע שנרכש עד כה מתוך ראייה כוללת ומטה-קוגניטיבית.**

הבעיות שיחברו יהיו בעיקר לפי הדוגמאות של בעיות שהוצגו בפרקים הקודמים. הדבר דורש שימוש רחב במרכיבים שנכללו שם, ויהיה בכך משום עלייה לרמה גבוהה יותר אשר תחזק את הרמות הקודמות ותעמיק את הבנת החומר. יחד עם זאת תדרוש הכתיבה חשיבה על אודות החשיבה שהופעלה עד כה, וזוהי אחת המטרות החשובות ביותר של מבנית זו – מודעות לדרך החשיבה שלנו.

טוב יעשה המורה אם יאלתר וריאציות על התרגילים, או, לאחר שהתלמידים כתבו בעיות מסוימות, יוסיף או ישנה את הנתונים או יבקש מהם להוסיף או לשנות נתונים ולראות האם אפשר לשאול שאלות נוספות או אחרות. למשל, ניתן לשאול "איזה שינוי יש לעשות כדי שהתשובה תגדל פי 2?"

בדוגמאות הבאות נכתוב בעיות מילוליות במתמטיקה. לגבי כל דוגמה עלינו:

• לנסות לראות לנגד עיניכם מצב או תהליך – של מציאות או של חידה.

• להיות אחראים לבעיה שהמצאנו, כלומר:

(א) הבעיה חייבת להתאים לתרגיל, לכל פרטיו.

(ב) אם הגענו למסקנה שחסרים נתונים – נוסיף נתונים בעצמנו.

(ג) הבעיה חייבת להתקבל על הדעת – הן מבחינת הסיפור, והן מבחינת היחידות.

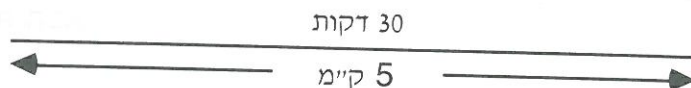
**בסוף כל דוגמה מובא רמז לפתרון אפשרי של הבעיה. בתרגילים שתבצעו בעצמכם בזוגות, בן-הזוג יפתור את הבעיה שהמצאתם.**

## עבודה על דוגמאות בתיווך מורה



### דוגמה 1

יש להמציא בעיה מילולית לתרשים הבא:



**האצב שאני רואה:** אחי יצא מהבית ברגל בשעה 08:00 לפגישה חשובה. הפגישה צריכה להתקיים בשעה 9:00. מקום הפגישה מרוחק 5 ק"מ מביתו.  
 בשעה 08:30 אני רואה על השולחן מסמך חשוב שאחי היה לקחת לפגישה. אני מחליט לרוץ אחרי.  
**בעיה (בעיית דרכים):** האם אספיק להשיג אותו לפני הפגישה? אולי כדאי שארכב על אופני?  
 הבעיה המילולית שאשאל היא: אדם צריך לעבור דרך של 5 ק"מ במשך 30 דקות. באיזו מהירות עליו לנוע?

(רמז לפתרון: נשתמש בנוסחה:  $s=vt$  או בווריאציה שלה:  $v=s/t$ )  
 $s = 5$  ק"מ,  $t = 30$  דקות = 0.5 שעה,  $v = ?$  לכן:  $v = 5 / 0.5 = 10$  קמ"ש  
 כלומר, אם לא ארוץ במהירות של לפחות 10 קמ"ש, לא אספיק להשיג את אחי לפני הפגישה).

### דוגמה 2

צריך להמציא בעיה מילולית למשוואה הבאה:

$$10x+y=18+(10y+x)$$

**האצב שאני רואה:** מדובר במספר דו-ספרתי  $10x+y$  ובמספר הכתוב באלות הספרות אך בסדר הפוך:  $10y+x$ . על פי המשוואה, אחד המספרים (האקורי) גדול ב-18 מאשנפ.  
**בעיה (בעיית מספרים):** מהו המספר? האם יש כאן פתרון יחיד? איפה לפתור את המשוואה.  
 פתחת הסוגריים והעברת האגפים מוליכה למשוואה שקולה:  $9x-9y=18$  או  $x-y=2$ .  
 למשוואה זו פתרונות רבים. מכאן שחסר נתון.  
 למשל, אם צא נתון: ספרת העשרות גדולה פי 2 מספרת האחדות.

**הבעיה המילולית שאשאל היא:** במספר דו-ספרתי ספרת העשרות גדולה פי 2 מספרת האחדות. אם נכתוב את ספרות המספר בסדר הפוך, נקבל מספר הקטן ב-18 מהמספר. מהו המספר?

**(רמז לפתרון:** נסיף למשוואה המקורית את המשוואה:  $x=2y$ .  
קבוצת האמת של המשוואות:  $\{x=4; y=2\}$   
כלומר המספר הוא 42, המספר השני הוא 24, וההפרש ביניהם הוא אכן 18).

### דוגמה 3

צריך להמציא בעיה מילולית למשוואה הבאה:

$$10x+y=3(x+y)$$

**האצה טאן רואה:** אזלר באספר דו-ספרתי  $10x+y$  ובסכום הספרות של אותו מספר  $x+y$ . על פי המשוואה האספר גדול פי 3 מסכום ספרותיו.  
**העיה (בעיה מספרים):** אהו האספר? האם יש כאן פתרון יחיד? אנסה לפתור את המשוואה.  
פתחת הסוגריים והעברת האגפים אוליכה למשוואה שקולה:  $7x=3y$ .  
למשוואה זו פתרונות רבים. אבל, באקרה זה יש נתון סמוי שלא הבאתי עד כה בחשבון:  $x$  ו- $y$  הם מספרים שלמים קטנים מ-10. אין אנסה לנמש פתרון:

**הבעיה המילולית שאשאל היא:** מספר דו-ספרתי גדול פי 3 מסכום ספרותיו. מהו המספר?

**(ניחוש פתרון:** קבוצת האמת של המשוואות:  $\{x=2; y=7\}$   
כלומר, המספר הוא 27, סכום הספרות הוא 9 והמספר אכן גדול פי 3 מסכום ספרותיו).

### סיכום – מה למדנו בפרק זה?

סכמו בכיתה מהם הדברים החשובים שלמדנו בפרק זה.

## תרגילים ?

בתרגילים הבאים תכתבו בזוגות בעיות מילוליות במתמטיקה, על פי הנתונים שבתרגיל. על הכתיבה להיות מקורית, או על-פי דוגמה – על-פי הדוגמאות שבפרקים הקודמים, ועל-פי בעיות אחרות המוכרות לכם. **כל אחד מבני-הזוג יכתוב בעיה בעצמו.** כשיגמור לכתוב, יעביר אותה לבן-זוגו לפתרון. אם בן-הזוג יתקשה מאוד, נסו לברר את הסיבה. אולי לא ניסחתם את הבעיה באופן מובן? אולי משהו לקוי בנתונים? אם הניסוח והנתונים בסדר והוא/היא עדיין מתקשים, הסבירו להם את הבעיה (אך לא את הפתרון). השוו ביניכם את הבעיות שכתבתם. אם כתבתם בעיות שונות, הדבר יעזור לכם להרחיב את ראייתכם.

כאשר אתם עומדים בפני תרגיל,

- עליכם לראות במה מדובר – רישמו לאיזה **סוג** בעיות תהיה שייכת הבעיה שתמצאו, ומהם סוגי המידות המעורבים, ונסו לראות לנגד עיניכם מצב או תהליך – של מציאות או של חידה.
- עליכם לשאול את עצמכם: מה אומרים לי הנתונים? על איזה מצב מדובר? מה זה מזכיר לי? איזה שאלות אפשר לשאול? האם השאלות הגיוניות? האם צריך גם להמציא נתונים? האם אפשר לשאול שאלות נוספות? האם אפשר לשאול שאלות מעניינות יותר?
- עליכם להיות אחראים לבעיה שהמצאתם:
- הבעיה חייבת להתאים לתרגיל, לכל פרטיו.
- אם הגעתם למסקנה שחסרים נתונים – הוסיפו נתונים בעצמכם.
- הבעיה חייבת להיות **הגיונית** – הן מבחינת הסיפור והן מבחינת היחידות (למשל, אם מדובר במשקל סגולי 1.2 גר"/סמ"ק – זה לא יכול להיות משקל סגולי של אוויר, וגם לא של ברזל).
- כדי לוודא שהבעיה הגיונית, נסו לפתור אותה או לפחות לנחש לה פתרון.

אם אפשר ומתאים – הוסיפו ציור.

1. בסיס משולש שווה-שוקים 12 ס"מ וגובהו 5 ס"מ.

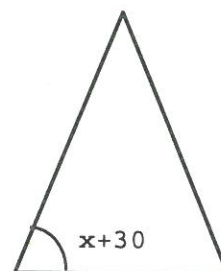
2. אורך מלבן 6 ס"מ ורוחבו 8 ס"מ.

3.  $2x+50=84$

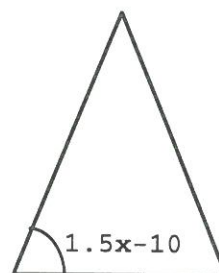
4.  $x/4=3$

5.  $10x+y=5(x+y)$

6.



7.

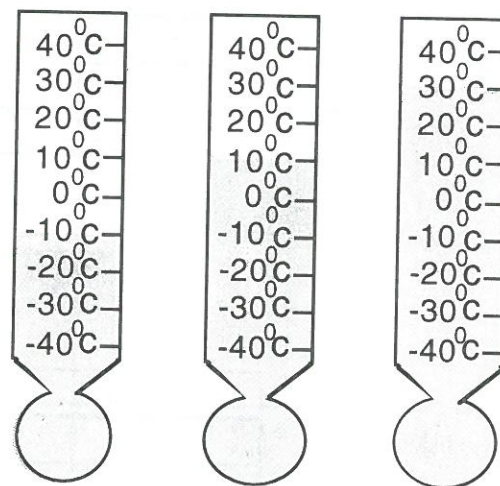


8.

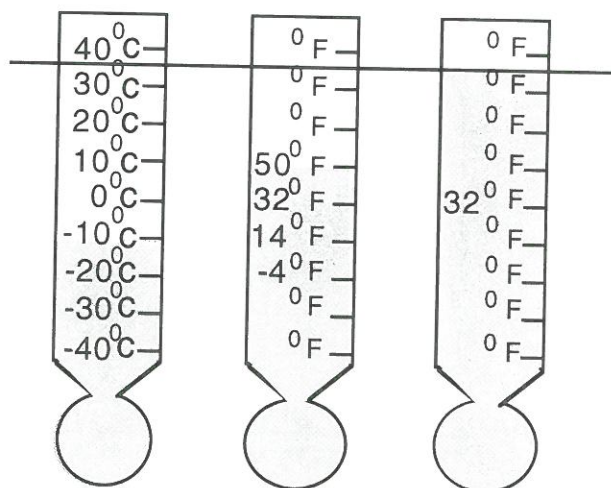
דצמבר 1600 מאורע ב'  
ינואר 1500 מאורע א'



9.



10. חברו שתי בעיות



11.

| מס' המוצרים | מחיר המוצר | סה"כ    |
|-------------|------------|---------|
| 3           | 2 ש"ח      | מוצר א' |
| x           | 4 ש"ח      | מוצר ב' |
|             | 14 ש"ח     |         |

12.

| מספר עפרונות | מחיר עיפרון | מחיר העפרונות |
|--------------|-------------|---------------|
| x            | 1/7 ש"ח     | x/7 ש"ח       |
|              |             | (450-x)/12    |
| 450          |             | סה"כ          |

13.

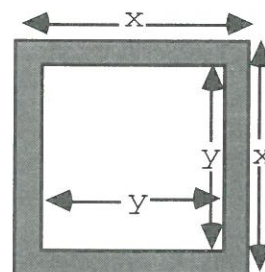
| משקל סגולי     | נפח     | משקל     |
|----------------|---------|----------|
| 11.4 גר'/סמ"ק  |         | 34.2 ק"ג |
| x              | 9 דצמ"ק |          |
| 5.025 גר'/סמ"ק |         |          |

האם ידוע לכם  
מהם החומרים?

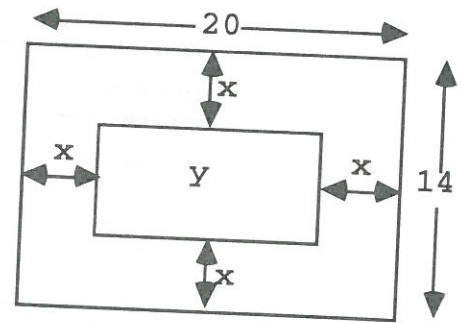
מאכאנו מלגוא

תערובת של  
שני החומרים

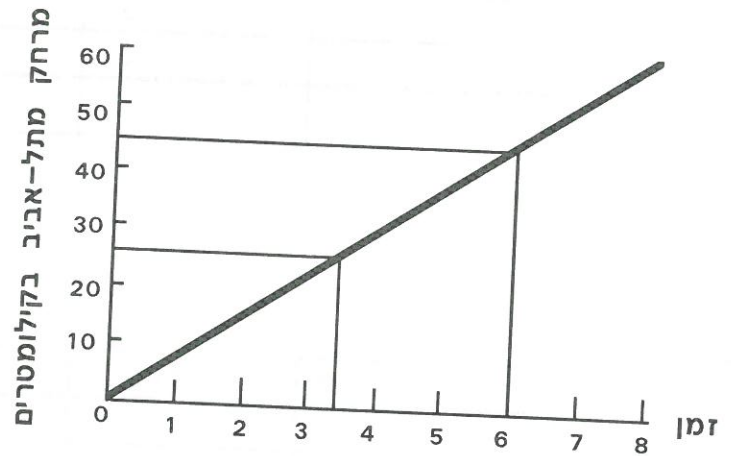
14.



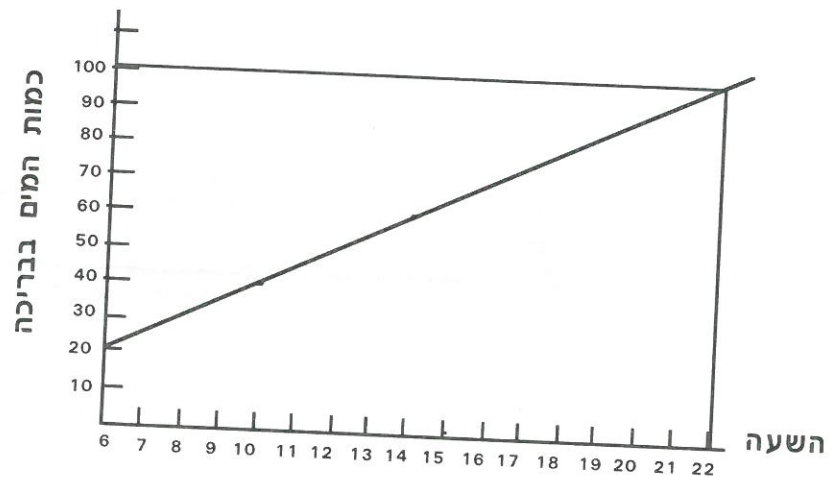
15.



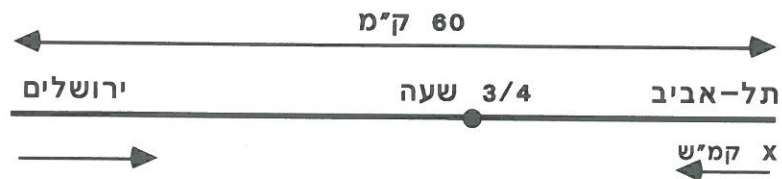
16.



17.



18.



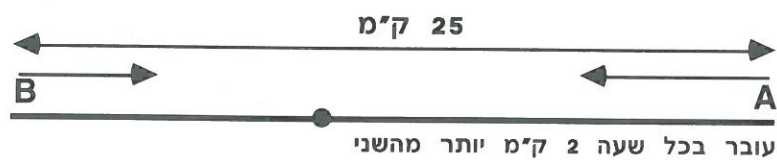
19.

| מהירות (v) | זמן (t) | דרך (s) |            |
|------------|---------|---------|------------|
| x          | 5       |         | תחילת הדרך |
| x+20       | 3       |         | המשכה      |
|            |         |         | סה"כ       |

20.

| מהירות (v) | זמן (t) | דרך (s) |              |
|------------|---------|---------|--------------|
| x          | 4       |         | הולך רגל     |
| x+10       | 1.5     |         | רוכב אופניים |
|            |         |         | סה"כ         |

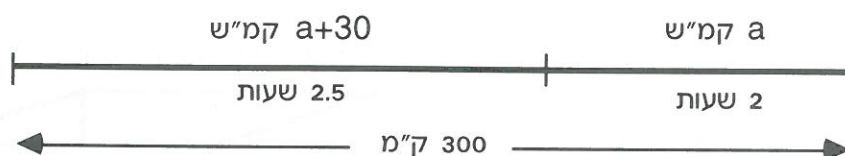
21.



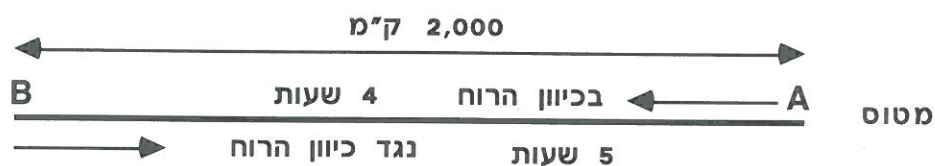
22.



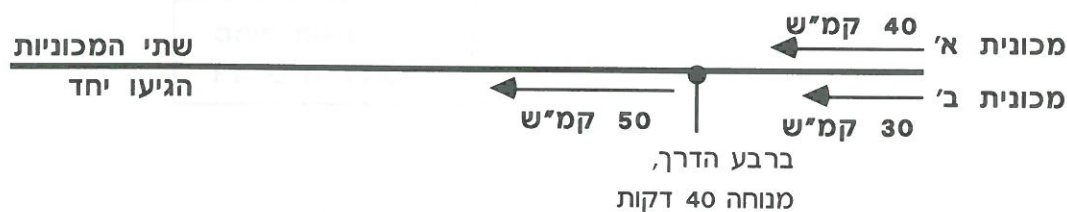
23.



24.



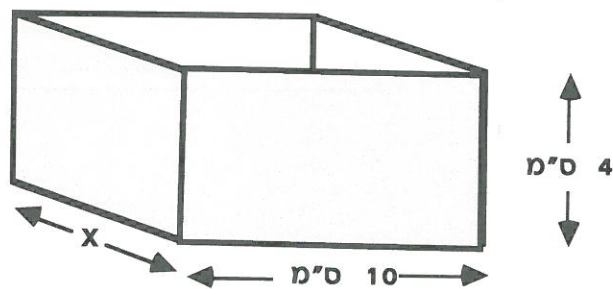
25.



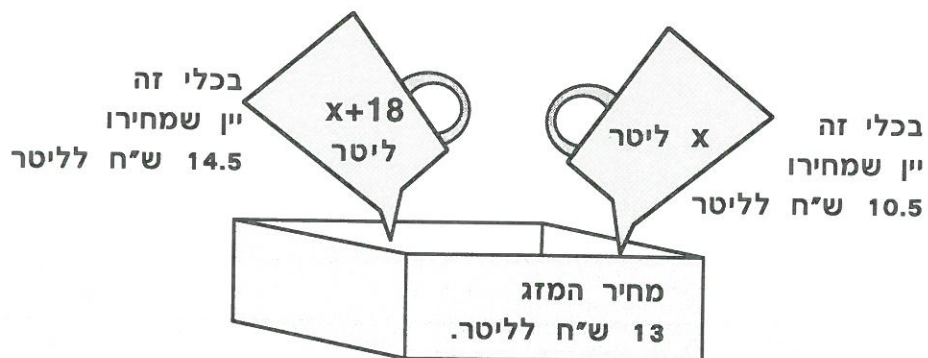
26.

| כמות חומר | כמות החומצה הנקיה |          |
|-----------|-------------------|----------|
| $x$       | $0.2x$            | חומצה א' |
| $y$       | $0.5y$            | חומצה ב' |
| 150       | $0.38(x+y)$       | ס"ה      |

27. כדי ליצור קופסא פתוחה השתמשו ב-198 סמ"ר קרטון.



28.

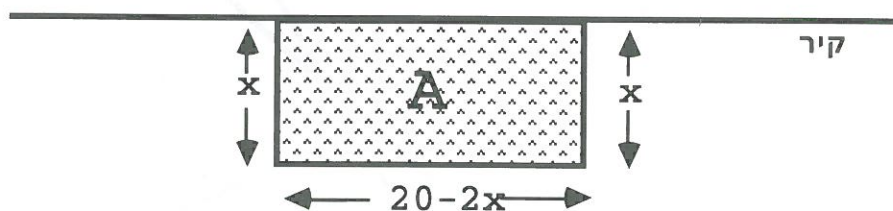


הצעה: אולי כדאי לרשום את הנתונים בטבלה.

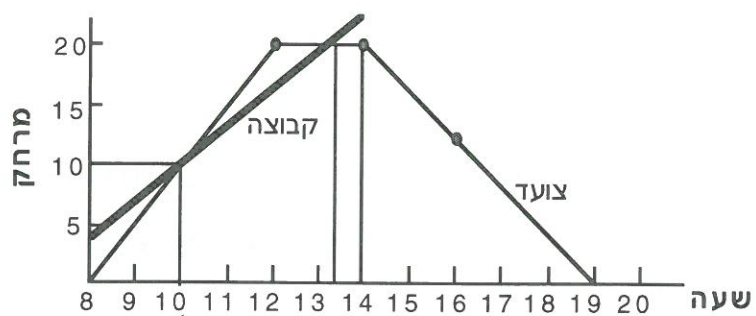
29.



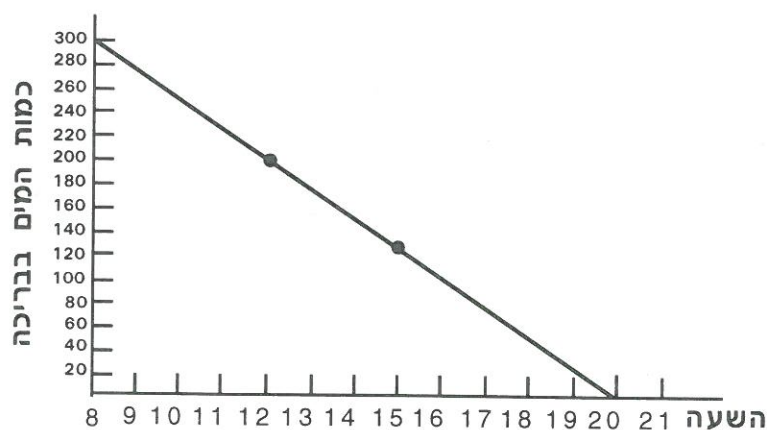
30.



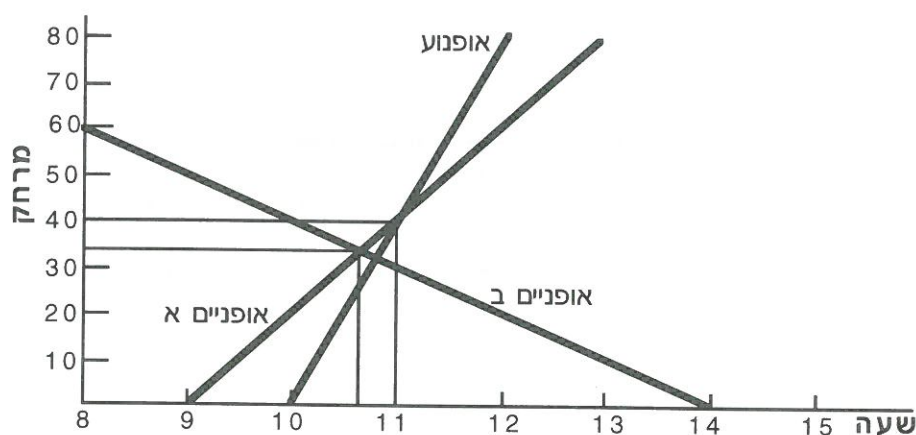
31.



32.



33.



הכללה ומודעות לתהליכי חשיבה לגבי



"המצאת בעיות"

הסבירו כיצד המצאתם את הבעיות וכיצד וידאתם שהן הגיוניות. מה היה קל ומה היה קשה בהמצאת בעיות? האם העבודה בזוגות עזרה לכם או הפריעה? האם עדיין יש סוג בעיות שקשה לכם להתמודד עמו?