

פרק 3: לאלגברה ולחשבון – אותו ההיגיון

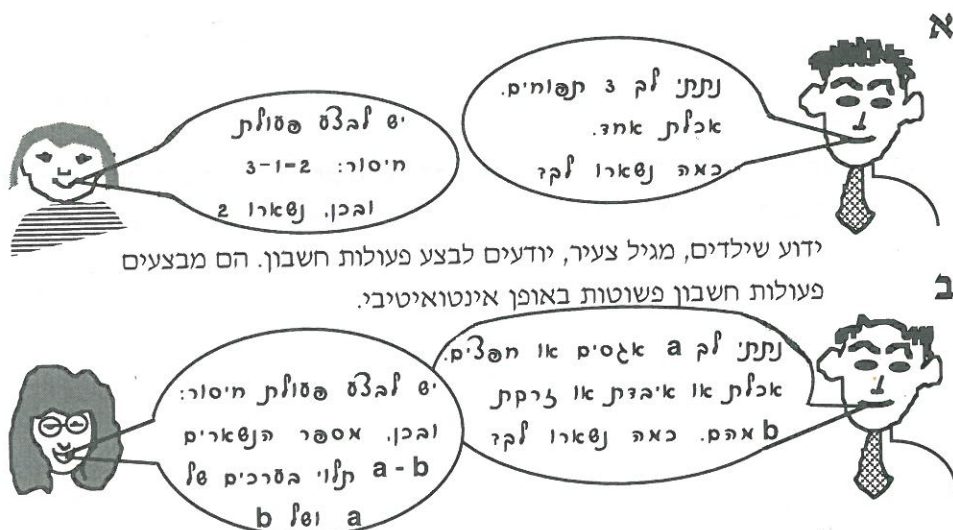
כלי החשיבה שנעסוק בו בפרק זה הוא הכללת ביטויים חשבוניים מוכרים לביטויים אלגבריים.

בשיעורי חשבון מציגים בפנינו בעיה מילולית ("סיפור") ואנו מבטאים אותה בשפת החשבון (כתרגיל בחשבון). שפת החשבון היא שפת סמלים. התרגיל החשבוני מאפשר לפתור את הבעיה המילולית. בכיתות הגבוהות יותר הבעיות מופשטות יותר, ושפת החשבון אינה מספיקה כדי לפתור אותן. אז צריך להשתמש בשפת סמלים מופשטת ומוכללת יותר – שפת האלגברה. אבל ההיגיון של האלגברה זהה להיגיון של החשבון, וההיגיון שמאחורי בניית ביטויים באלגברה זהה להיגיון של בניית ביטויים בחשבון.



1. להיות מודעים לקיום שפות סמלים כגון שפת החשבון ושפת האלגברה.
2. להסתייע בשפת החשבון לביסוס שפת האלגברה.
3. לפתח חשיבה מופשטת.

לדוגמה, התבוננו בשני ה"סיפורים" הבאים:

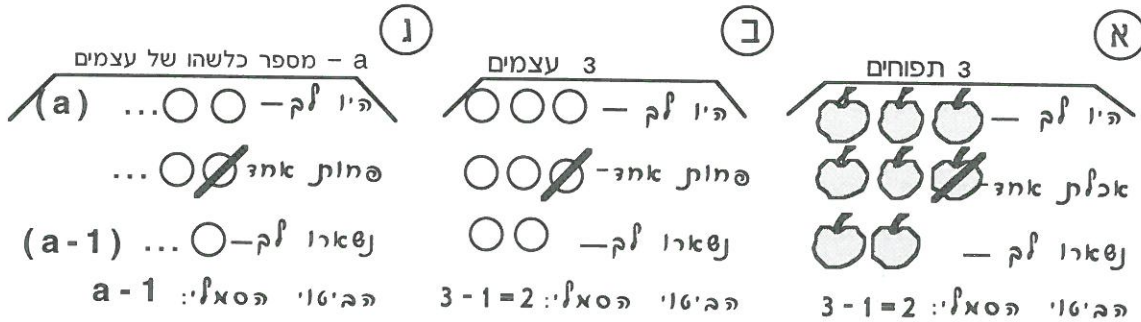


בשלב מאוחר יותר, רואים בדמיון את תרגיל החשבון או את הביטוי האלגברי. החשיבה אז מופשטת ומוכללת.

רישמו נקודות דמיון ושוני בין שני ה"סיפורים".

בגיל צעיר מאוד, הילד רואה בדמיונו את התפוחים. כנראה שכל אחד רואה תפוחים אחרים: אחד רואה תפוחים ירוקים, השני רואה תפוחים אדומים, השלישי תפוחים קטנים, הרביעי תפוחים גדולים וכו'. בשלב מאוחר יותר, רואים שלושה עצמים, ומבינים שגם אם הבעיה עוסקת בתפוחים או באגסים, אין זה משנה לפתרון, ואם אכלתם או איבדתם או זרקתם – בכל מקרה יש לכם פחות. מאוחר יותר רואים בדמיון את תרגיל החשבון או את הביטוי האלגברי כתחליף למוחשי. בשלב זה כבר חושבים בצורה מופשטת ומוכללת.

שלבים בחשיבה - מהמוחשי למופשט ולמוכלל.



אנו רוצים להסתמך על ההיגיון של אותו תרגיל בחשבון שאנו כבר יודעים לבנות ולפתור, כדי לבנות ביטויים מוכללים בשפת האלגברה, שישמשו אותנו בעתיד.

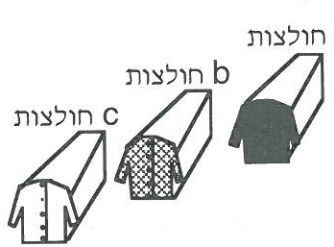
בפרק זה נעבוד עם הכלים של שפת החשבון ושפת האלגברה. נשווה בין צורת הצגה של בעיות דומות בשפת החשבון ובשפת האלגברה.

ה"הסבה" לשפת האלגברה מחייבת להחליט שגודל מסוים, שאין אנו יודעים את כמותו המדויקת, הוא "משתנה" ולכן יסומן באות (סמל). ייתכן שבעזרתו אפשר גם לבטא גדלים אחרים המופיעים בסיפור. כדי לפתור את הבעיה המוכללת, צריך לרשום ביטוי אלגברי (תבנית מספר).

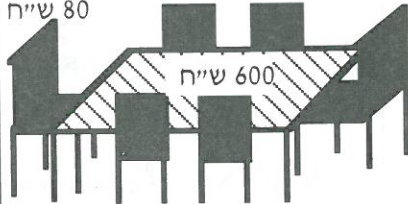
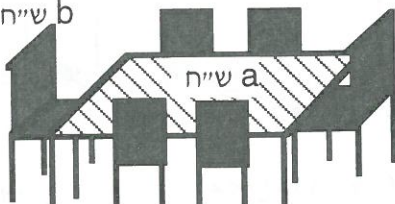
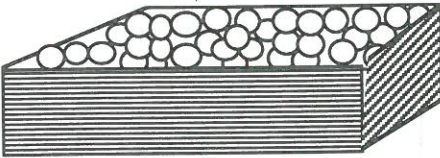
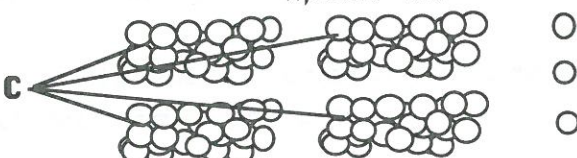
עבודה על דוגמאות בתיווך המורה



בטבלה שבעמודים הבאים דוגמאות לתרגילים. בטבלה שלושה טורים: בטור הימני נקבל "סיפור" מילולי המציג בעיה. כדי לפתור אותה, צריך לרשום תרגיל חשבון. בטור האמצעי נספר אותו סיפור בדרך מופשטת ומוכללת יותר – אחד או יותר מהנתונים המספריים יהפכו למשתנים, כלומר לגדלים שאין יודעים את כמותם. בטור השמאלי חוזרים מההכללה אל המוחשי: מציבים מספרים במקום האותיות שבטור האמצעי במטרה לקבל שוב ביטוי דומה לזה שהיה לנו בטור הימני. זוהי גם בדיקה לנכונותה של תבנית המספר שרשמנו בטור האמצעי. כאשר אתם קוראים את הבעיה, ראשית ציירו אותה (כל אחד כיכולתו; איכות הציור אינה חשובה). רצוי לדמיין את הסיפור. הכרחי ליצור בראש תמונה של הבעיה – במה מדובר, באיזה סוג מידה וכו'. ההבדל בין הטורים הוא שבטור הימני הנתונים מספריים ובטור האמצעי הנתונים מוכללים. בכל תרגיל, ציינו גם באיזה סוג של מידה מדובר.

תרגיל חשבון (מקרה פרטי)	הפשטה והכללה (אלגברה)	בחזרה מההכללה למוחשי הציבו מספרים בתבנית ובדקו
לרותי יש 2 חולצות כחולות, 3 חולצות אדומות ו-5 לבנות. כמה חולצות יש לרותי? 	לרותי יש a חולצות מסוג א', 3 חולצות מסוג ב' ו-5 מסוג ג'. כמה חולצות יש לרותי? $a+3+5$ אפשר גם: לרותי יש a חולצות מסוג א', b מסוג ב' ו-5 מסוג ג'. לרותי יש $a+b+5$ חולצות אפשר גם: לרותי יש a חולצות מסוג א', b מסוג ב' ו-c מסוג ג'. 	נציב בתבנית $a+3+5$ $a=2$ לרותי $10=2+3+5$ חולצות נציב בתבנית $a+b+5$ $a=2$ $b=3$ לרותי $10=2+3+5$ חולצות
לרותי יש $2+3+5=10$ חולצות מדובר בעצמים (חולצות) שיש לחבר (לסכם).	לרותי יש $a+b+c$ חולצות a, b ו-c יכולים להיות מספרים כלשהם.	אם נציב בתבנית $a+b+c$ $a=4$ $b=1$ $c=3$ לרותי $8=4+1+3$ חולצות

תרגיל חשבון (מקרה פרטי)	הפשטה והכללה (אלגברה)	בחזרה מההכללה למוחשי
בעל חנות תקליטים קנה את התקליט החדש של משינה במחיר 40 ש"ח. ומכר אותו ברווח של 10 ש"ח. כמה שילמתם אתם בעבורו? מדובר בחיבור של כספים בש"ח. קניתי ב-40 ש"ח רוצה להרוויח 10 ש"ח כמה אאכור? $40+10=50$ המחיר לצרכן: 50 ש"ח = $40+10$	סוחר קנה משהו במחיר a ש"ח ומכר אותו ברווח של 10 ש"ח. כמה שילם הצרכן? המחיר לצרכן a+10 ש"ח אפשר גם לשאול אחרת: עלה לי - a ש"ח אמכור ברווח של b ש"ח אקבל a+b ש"ח a=40 b=10 המחיר לצרכן a+b ש"ח	נציב בתבנית a+10 a=40 המחיר לצרכן 40+10 ש"ח כלומר 50 ש"ח
אדם קנה מקרר במחיר 2,400 ש"ח. בעת ההזמנה שילם 400 ש"ח ואת היתרה ישלם ב-4 תשלומים חודשיים שווים. מהו התשלום החודשי? המידה שעוסקים בה היא כספים בש"ח בעת ההזמנה שילם b ש"ח ואת היתרה ישלם ב-4 תשלומים חודשיים שווים. מחיר המקרר 2,400 ש"ח תשלום ראשון 400 ש"ח היתרה _____ ש"ח ב-4 תשלומים שווים כל אחד: _____ ש"ח היתרה: $2,400-400=2,000$ תשלום חודשי: $2,000/4=500$	אדם קנה חפץ במחיר a ש"ח. בעת ההזמנה שילם 400 ש"ח ואת היתרה ישלם ב-4 תשלומים חודשיים שווים. מהו התשלום החודשי? תשלום חודשי: $(a-400)/4$ אפשר גם לשאול: אדם קנה חפץ במחיר a ש"ח. המחיר: a ש"ח תשלום ראשון - b ש"ח תשלומים חודשיים: כ"א $\frac{a-b}{4}$ ש"ח היתרה: a-b תשלום חודשי: $(a-b)/4$	נציב בביטוי $(a-400)/4$ a=2400 $(2,400-400)/4=$ $2,000/4=500$ נציב בביטוי $(a-b)/4$ a=2,400 b=400 $2,000/4=500$

תרגיל חשבון (מקרה פרטי)	הפשטה והכללה (אלגברה)	בחזרה מההכללה למוחשי
שולחן עולה 600 ש"ח וכיסא עולה 80 ש"ח. כמה עולים שולחן ו-6 כיסאות?  המידה שעוסקים בה היא כספים בש"ח <u>המחיר: $600 + 6 \cdot 80 = 1,080$ ש"ח</u>	שולחן עולה a ש"ח וכיסא עולה b ש"ח. כמה עולים שולחן ו-6 כיסאות?  <u>המחיר: $a + 6b$ ש"ח. אפשר להשתמש בביטוי זה גם אם המחירים ישתנו</u>	נציב בביטוי $a + 6b$ $a = 600 \quad b = 80$ המחיר $600 + 6 \cdot 80 = 1,080$ אבל, אם $a = 1,000$ ו-$b = 80$ המחיר $1,000 + 6 \cdot 80 = 1,480$
חילקנו את התפוזים שבארגז בין ארבעתנו. כל אחד קיבל 23 תפוזים, ונותרו 3. כמה תפוזים היו בארגז? המידה שעוסקים בה היא פריטים.  <u>היו בארגז: $4 \cdot 23 + 3 = 95$ תפוזים</u>	חילקנו את הפריטים שבארגז בין ארבעתנו. כל אחד קיבל c פריטים, ונותרו 3. כמה פריטים היו בארגז?  <u>היו בארגז: $4c + 3$ פריטים</u>	נציב בביטוי $4c + 3$ $c = 23$ ונקבל <u>$4 \cdot 23 + 3 = 95$ תפוזים</u>

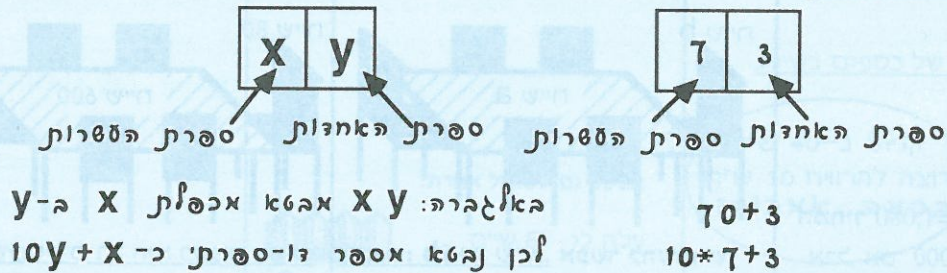
מנה היא תוצאת החילוק של כמות (מחולק) למספר קבוצות שוות (מספר הקבוצות השוות הוא המחלק). מספר הפרטים בכל קבוצה נקרא מנה. לעתים, לאחר החילוק (לאחר שכל קבוצה קיבלה מספר שלם של עצמים), נשארת כמות קטנה ממספר הקבוצות, וזוהי השארית.

את העובדה שכאשר מחלקים שני מספרים a (מחולק) ו-b (מחלק) זה בזה ומתקבלת מנה c ושארית d ניתן לתאר בשתי דרכים:

(בחשבון – לדוגמה, מחלקים 47 ב-11): $47/11 = 4 + 3/11$ או $47 = 4 \cdot 11 + 3$
 (באלגברה): $a/b = c + d/b$ או $a = cb + d$

השוואה בין ביטוי חשבוני לביטוי אלגברי בהצגת מספרים על-פי השיטה העשרונית (העשורית).

אספר נז-ספרת'



בהצגת מספרים עשרוניים (על פי השיטה העשרונית) לא רק הספרה חשובה אלא גם המקום שבו היא כתובה.

לפעמים חסרות אחדות, או עשרות או מאות במספר ואז יש במקום 0.

דוגמה: במספר 210 אין אחדות, ויש במקום 0.

אם מוסיפים 0 באמצע מספר - משנים את מקומן של כל הספרות שמשמאל ל-0 הנוסף. ואז, למשל, עשרות הופכות להיות מאות, מאות הופכות להיות אלפים וכו'.

דוגמה: 215 ו-2,105. 1 עשרות הפך להיות 1 מאות. 2 מאות הפכו להיות 2 אלפים.

כדי להגדיל מספר עשרוני פי 10 יש להוסיף מימין 0. הדבר משנה את מקומן של כל הספרות.

דוגמה: 125 ו-1,250. הוספנו אפס מימין והמספר גדל פי 10.

כדי להקטין מספר עשרוני פי 10 יש לרשום נקודה עשרונית בין ספרת האחדות והעשרות. הדבר משנה את מקומן של כל הספרות.

דוגמה: 3,274 ו-327.4. על-ידי הוספת הנקודה העשרונית הקטנו את המספר פי 10.

סיכום - מה למדנו בפרק זה?

סכמו בכיתה מהם הדברים החשובים שלמדנו בפרק זה.

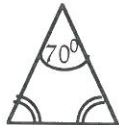
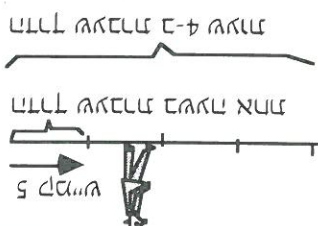
תרגילים (תשובות בסוף הפרק) ?

עיבדו בזוגות על התרגילים. בידקו עצמכם בעזרת הרמזים המהופכים רק אחרי שסיימתם:

לא לשכוח להוסיף ציור, ולציין גם באיזה סוג של איזה מדובר.

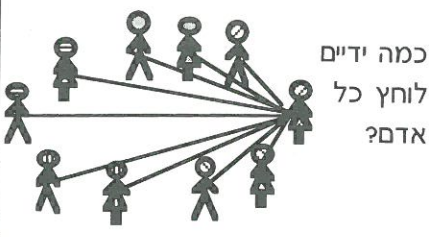
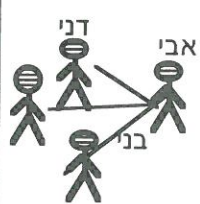
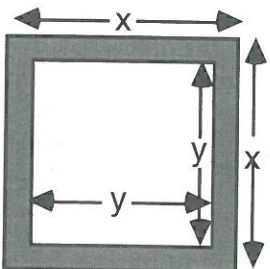
תרגילי אתגר מסומנים ב- *

תרגיל חשבון (מקרה פרטי)	אלגברה	בחזרה מאלגברה לחשבון
1. בכיתה זו 12 בנים ו-18 בנות. מה ההפרש בין מספר הבנות למספר הבנים בכיתה?	בכיתה זו x בנים ו-18 בנות. מה ההפרש בין מספר הבנות למספר הבנים בכיתה? בכיתה זו x בנים ו- y בנות. מה ההפרש בין מספר הבנות והבנים?	
2. חתכו מוט עץ שארכו 3 מ' לחלקים שווים באורך 15 ס"מ. כמה חלקים קיבלו?	חתכו מוט עץ שארכו x מ' לחלקים שווים באורך 15 ס"מ. כמה חלקים קיבלו? חתכו מוט עץ שארכו x מ' לחלקים שווים באורך y ס"מ. קיבלו _____ חלקים	
3. רינה הכינה 40 עוגיות וחילקה אותן בין 8 האורחים שהגיעו למסיבה. כמה יקבל כל אורח?	רינה הכינה n פריטים זהים, וחילקה אותם בין 8 אורחים. כמה יקבל כל אורח? הגיעו למסיבה n אורחים. כל אורח קיבל _____ פריטים.	

תרגיל חשבון (מקרה פרטי)	אלגברה	בחזרה מאלגברה לחשבון
4. זווית הראש במשולש שווה שוקיים היא 70°. מה גודל זווית הבסיס? 	רישמו תרגיל:	
5. זיו בן 7. אביו גדול ממנו פי 5. בן כמה האב?	זיו בן x. אביו גדול ממנו פי 5. בן כמה האב?	
6. בכיתה ז 30 תלמידים. מהם 12 בנים. מה ההפרש בין מספר הבנות למספר הבנים בכיתה?	רישמו תרגיל:	
7. ביום ששי צעדו 4 שעות במהירות 5 קמ"ש. איזו דרך עברת? (מה מחשבים?) 	אדם צעד 4 שעות במהירות קבועה. נניח שהמשתנה a מייצג את המהירות. איזו דרך עבר? (מהן היחידות?)	
זמאזזזז זמא 'S' לזזז ז' לזזז 'A' זמאזזזז לז זמאזזזז זמאזזזז זמאזזזז זמאזזזז		
	אדם צעד b שעות במהירות קבועה a. איזו דרך עבר?	

[illegible]

מכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה ©

בחזרה מאלגברה לחשבון	אלגברה	תרגיל חשבון (מקרה פרטי)
	n אנשים לוחצים ידיים זה לזה. כמה לחיצות ידיים היו?  כמה ידיים לוחץ כל אדם?	11*. 4 אנשים לוחצים ידיים זה לזה. כמה לחיצות ידיים היו?  1. כמה ידיים לוחץ כל אחד? זיכרו שהוא אינו לוחץ את ידו שלו. 2. בחישוב סך לחיצות הידיים זיכרו שכשאבי לוחץ את ידו של דני, לוחץ גם דני את ידו של אבי. <u>התבצעו סה"כ $6 = (4 \cdot 3) / 2$ לחיצות ידיים. מדוע?</u>
	כמה אלכסונים יש למצולע בן n צלעות?	12*. כמה אלכסונים יש למחומש? ציור:
	בתוך ריבוע שאורך צלעו x ס"מ ציירו ריבוע שאורך צלעו y ס"מ. מה שטחו של כל אחד מהריבועים? מה שטח השוליים? 	13. בתוך ריבוע שאורך צלעו 10 ס"מ ציירו ריבוע שאורך צלעו 8 ס"מ. מה שטחו של כל אחד מהריבועים? מה שטח השוליים? (מהי היחידה?) ציור:

תרגיל חשבון (מקרה פרטי)	אלגברה	בחזרה מאלגברה לחשבון
14. כמה מרצפות ריבועיות שאורכן 20 ס"מ דרושות כדי לרצף חדר שאורכו 3.4 מ' ורוחבו 3 מ'?	כמה מרצפות ריבועיות שאורכן 20 ס"מ דרושות כדי לרצף חדר שאורכו 3.4 מ' ורוחבו 3 מ'?	
15. מספר הבנות בכיתה הוא 14. הבנות מהוות $\frac{1}{3}$ מתלמידי הכיתה. כמה תלמידים בכיתה?	רישמו תרגיל:	
16. לשולי 100 ש"ח. היא קנתה מחברת וספר. המחברת עלתה $\frac{1}{20}$ מכספה. הספר עלה $\frac{1}{5}$ מכספה. כמה כסף נשאר לשולי?	לשולי x ש"ח. היא קנתה מחברת וספר. המחברת עלתה $\frac{1}{a}$ מכספה. הספר עלה $\frac{1}{5}$ מכספה. כמה כסף נשאר לשולי?	
17. מכוס המכילה 1 ליטר התנדפו 5%. איזו כמות נשארה בכוס?	רישמו תרגיל:	
18. תינוק נולד במשקל 2,800 גר'. כשהיה בן שנה שקל 9.8 ק"ג. פי כמה גדל משקלו?	רישמו תרגיל:	