

פרק 6: מיפוי הבעיה – ניסוח מחדש וזיהוי המטרה והנתונים (גלויים וסמויים)

כלי החשיבה שנעסוק בו בפרק זה הוא **מיפוי הבעיה**.

לדעתנו, פרק זה הוא הפרק המרכזי בספר. ננסה בפרק להדריך את התלמיד להפעיל מנגנונים שונים כדי להבין באופן יסודי טקסט לא מוכר, שנראה אולי קשה. הפרק ארוך כי הוא נוגע ברמות שונות של הבנת טקסט מתמטי, ולכן מובן שיילמד לאורך תקופה ארוכה יותר משאר הפרקים. להשלמת הפרק הזה נעסוק בפרקים הבאים בניחוש ואומדן של פתרון, בדרכים שונות להצגת נתונים, בבחינת הנתונים. פרקים אלה יסייעו לניסוח ולהבנת הבעיה. בפרק זה נכניס שימוש בכלי ארגוני – "מארגן חשיבה גרפי"⁴ – שבנייתו והשימוש בו יעזרו לנו לארגן את החשיבה, ויש בו מן הקביעות והגמישות הדרושים לבניית פתרון לבעיות ברמות השונות. מארגן החשיבה הגרפי ילווה אותנו לאורך כל הפרקים הבאים. הוא ימולא בחלקו בשיעור זה, ויושלם בשיעורים הבאים. ייתכן שיהיה צורך למלא מחדש את המארגן.

תארו לעצמכם שביקשתי מכם להביא לי משהו מכתובת שאינכם מכירים. האם הייתם יוצאים מיד לדרך? **דונו** עם שכנכם בנושא ובררו את האפשרויות.

בסיכום הדיון נגיע למסקנה שכדי להבטיח שאגיע למקום הנכון, נחוץ מיפוי של הדרך (באמצעות הוראות או מפה).

תארו לעצמכם שקיבלתם כתב חידה של "מחפשים את המטמון": האם יהיה זה נכון לשלוח אנשים לחפש את המטמון לפני שפיצחתם את כתב החידה? מדוע?

יהיו בוודאי תלמידים שיחשבו שאין צורך בפיצוח כתב החידה. כדאי לשכנע אותם להגיע למסקנה שדרוש מיפוי של הבעיה, כי אחרת הם עלולים לבזבז כסף, זמן ומאמץ מבלי להגיע לתוצאות. המורה יחליט אם כדאי להרחיב את השיחה על מקרים (לאו דווקא בשטח המתמטיקה) שבהם מרוב להיטות להגיע לפתרון לא איתרו את הבעיה והפסידו זמן יקר, או על מקרים שבהם מרוב להיטות להשתמש במכשיר מסוים או בחומר מסוים, לא קראו את ההוראות וגרמו נזק או בזבז זמן.

אחת הסיבות לכישלון בפתרון בעיות (לאו דווקא במתמטיקה) היא שמתרכזים בפתרון ולא בבעיה עצמה.

המפתח לפתרון בעיה הוא להבין את הבעיה, לנסח אותה לעצמכם בצורה שתהיה נוחה לפתרון, ולזהות מהם נתוני הבעיה ומה מבקשים מכם לעשות.

מטרות

1. להביא למודעות התלמידים שעליהם **לאמן את עצמם** לשים דגש על **הכרת והבנת הבעיה לפני** שהם רצים לחפש לה **פתרון**. כלומר, עליהם להתרכז בחקירת הבעיה ומיפוייה (במה מדובר? מה ההקשר? מה יש לנו כאן? מה אומרות המילים? מה אומרים המספרים? אילו אסוציאציות מתעוררות בנו? וכו').
וכתוצאה מכך לרכוש הרגל של הבנת הטקסט המילולי לעומקו ולפרטיו **לפני** שניגשים להסבתו לשפה אלגברית ולפתרון הבעיה. מחקרים גילו שמומחים לפתרון בעיות מקדישים הרבה יותר זמן מטירונים ל"פעילויות מוקדמות": מיפוי הבעיה, הגדרתה, מציאת דרכים חלופיות להצגתה ותכנון גישה לפתרונה.
2. **לרכוש מיומנות והרגל של קריאה חוזרת**, תוך מעקב אחר המחשבות המלוות את הקריאה וניסיון לנסח ולארגן את הבעיה (רצוי בכתב) בדרכים רבות ככל האפשר:
כאשר אתם רואים בעיה מילולית ארוכה ומסובכת, חשוב לקרוא אותה מספר פעמים:
 - **קריאה ראשונית:** כדי להתרשם ולדעת באופן כללי במה מדובר (עמידה ראשונית בפני הבעיה) **והאם אפשר לשייך את הבעיה לסוג בעיות מוכר** (למשל, בעיות תנועה, תערובות, מספרים עשרוניים, גילים, קבוצות וכו') או לבעיה שאתם כבר מכירים את פתרונה.⁵
 - **קריאה שנייה – ביקורתית** (לעתים דרושות קריאות נוספות) - כדי להבין באופן מעמיק את מה שקראתם **לפרטיו**, עליכם לנסח ולארגן את הבעיה לעצמכם בצורה שתהיה יותר פשוטה ומובנת לכם, כך שתוכלו להבין את המילים ואת ה"סיפור", שתנסו למצוא בזיכרון נוסחאות או משפטים הקשורים ל"עולם הבעיה", שתבינו את מטרת הבעיה (מהם הדברים הנשאלים – מה מבקשים מאיתנו) ואת הקשר בין הנתונים והמטרה.
 - מומלץ לגשת לקריאה הביקורתית עם מרקר או עם עיפרון, ולהדגיש מילים או ביטויים מרכזיים או בלתי מובנים.
 - **קריאה בין השורות** (בבעיות פשוטות נעשית קריאה זו בעת ובעונה אחת עם הקריאה הביקורתית): מה רלוונטי לבעיה ולא נאמר? מה ניתן להבין "בין השורות" – מיון הדברים החשובים והלא-חשובים והבנת משמעות ה"סיפור" בהקשר הנכון; קריאה "מעבר לשורות" – מהן המסקנות המשתמעות מה"סיפור", מהו הקשר בין כל הדברים.
 - לאחר הקריאה מנסחים מחדש את הבעיה בדרכים פשוטות ומובנות לקורא.

5 לעתים מתברר רק אחרי הקריאה השנייה או השלישית באיזה סוג של בעיות מוכרות מדובר. אז חוזרים על תהליכי הקריאה הביקורתית והקריאה בין השורות.

- הקריאה האחרונה מיועדת לבחון האם אכן הבנו נכון את הבעיה, ולניסיון להעמיק ב"עולם הבעיה".
- 3. ללמוד **לנסח בעיה בצורה מובנת לפותר** בצמוד לקריאתה. לאנשים שונים יש דרכים שונות להבהיר לעצמם בעיה. יש אנשים האוהבים לכתוב את הנוסח שלהם בצורה מילולית. יש המדברים אל עצמם או אל זולתם ובכך מבהירים לעצמם את הבעיה. לרוב האנשים עוזר ייצוג חזותי (תרשים או ציור) כדי להמחיש את ה"סיפור". יש הכותבים את הנוסח שלהם בראשי פרקים, בציון מילות מפתח, יש הכותבים בשפה אלגברית, בטבלה וכדומה. יש הנעזרים במקביל במספר דרכים.
- 4. לעשות שימוש בכלים שרכשו התלמידים בפרקים הקודמים: הבנת היחידות שבהן מדובר, כתיבת "רשימת מצאי" של הנתונים והמסקנות המשתמעות מהם תוך כדי קריאה ביקורתית של הבעיה.
- 5. להכיר שימוש במארגן חשיבה גרפי. נציג מארגן חשיבה גרפי שנמלא באופן חלקי בפרק זה, ואשר ישרת אותנו גם בפרקים הבאים.

מדוע צריך לנסח מחדש את הבעיה?

יש מקרים שבהם קשה לכם, הפותרים, לראות כי מדובר בבעיה "מן החיים". לכותב הבעיה היו כוונות טובות: הוא ניסה "להקל על חייכם" והביא בפניכם את הבעיה המתמטית הטהורה, שבה כלל את כל המידע האיכותי והכמותי הרלוונטי, בלי להכניס אתכם להתלבטויות ולהחלטות האיכותיות שקדמו לניסוח הבעיה המילולית. התוצאה היא בעיה המנוסחת בצורה יבשה, תמציתית, מנותקת מהמציאות, קשה להבנה, ואינה מעוררת רצון להתמודד עמה. כתוצאה מכך אתם מתקשים גם להבין מהי, בעצם, הבעיה, כלומר, מה מבקשים מכם לעשות. ואם אינכם יודעים מה נדרש מכם לעשות – איך תתכננו את הדרך לביצוע המשימה? לעתים הבעיה מכילה דווקא פרטים רבים, חלקם שייכים לבעיה וחלקם אינם שייכים, ואתם מבולבלים וקשה לכם להחליט מהו עיקר ומה טפל, ומה הקשר בין העיקר ובין מה שמבקשים מכם לבצע או למצוא. כאשר מדובר בחידות, קיימת בעיית הניסוח – הבנת ה"סיפור" שמישהו אחר מספר. הניסוח מחדש עוזר לכם לראות בדמיונכם את "עולם הבעיה". פירושו הבנת הבעיה, שיוכה לסוג בעיות מוכר, ארגון מחדש של הנתונים במלים פשוטות, תוך הוצאת הדברים העיקריים וזריקת הדברים הטפלים, הבנת הקשר בין הדברים, והבנה של מה שמבקשים מאיתנו למצוא בבעיה (ראיית המטרה). לעתים צריך לתמצת את ה"סיפור", אך לעתים צריך להרחיב ולהוסיף מלים.

מדוע צריך לחפש נתונים סמויים?

נתונים מפורשים הם אלה הנזכרים בנוסח הבעיה. נתונים סמויים הם כל הנתונים המסתתרים, שניתן להסיק אותם מן הנתונים הגלויים, או שניתן להסיק מידע על "עולם הבעיה" (למשל, בבעיה על משולש לא טורחים להזכיר תמיד ששכום זוויות המשולש הוא 180°), או נתונים שלכאורה הם מובנים מאליהם. הצרה היא שמה שמובן מאליו לכותב הבעיה או לקורא אינו חייב להיות מובן מאליו לקורא ב', ואז נראה לו שחסרים נתונים.

כדי לפתור בהצלחה את הבעיה על הקורא להיות **מודע** לאפשרות שיהיו נתונים סמויים בסיפור הבעיה, וללמוד לקרוא בעיה במתמטיקה תוך כדי חיפוש של הנתונים הסמויים.

הדבר דומה לעבודתו של **בלש**: הוא מחפש בבעיה קצה חוט, נקודת מוצא, שממנה יתחיל לגשש על-מנת להפוך את הנתונים הסמויים לגלויים. בדרך-כלל, אחרי שנמצאו אותם נתונים, אנו מתפללים על עצמנו כיצד לא היו גלויים לנו מלכתחילה. לעתים צריך לעבוד קשה כדי למצוא את כל הנתונים.

פעמים רבות קצה החוט שאותו אנו מחפשים יימצא אם נדע לשייך את הבעיה הנדונה לבעיות או לסוג בעיות שפתרון מוכר לנו. הסעיף הבא סוקר סוגי בעיות מוכרים. יש להיזהר לא ליפול למלכודת: למשל, לא כל בעיה שמדובר בה על הליכה היא בעיית דרכים (ראו דוגמה 2 בפרק זה).

שיוך בעיות לסוגים (קטגוריות) מוכרים

- בעיות שניתן לפתור בדרך אלגברית מתחלקות, למספר סוגים עיקריים (זוהי חלוקה מלאכותית ושרירותית):
- א. **חידות** שפתרון אלגברי – בעיות הקשורות במספרים, בגילים, וב"סיפורים" כללים אחרים.
 - ב. **מכפלה ומנה** – מכפלה ומנה של מספרים טבעיים.
תיאור קשר: **מחולק = מחלק * מנה + שארית**.
 - ג. **מספרים עשרוניים** – בעיות העוסקות בקשר בין ספרות של מספרים המבוטאים בשיטה העשרונית.
תיאור קשר: הצבת המספר כ- **ספרות האחדות + ספרות העשרות * 10 + ספרות המאות * 100** וכו'.
 - ד. **בעיות מהירות ודרכים** – בעיות המתארות קשר בין מהירות, זמן תנועה ודרך של גופים שונים.
בבעיות אלה תבניות הפסוק מסתמכות על נוסחת הקשר בין מהירות v , זמן t ודרך s : $s=vt$.
 - ה. **בעיות הספק ועבודה** – בעיות המתארות עבודה והספק של פועלים, של בריזים או של צינורות הממלאים בריכות וכו'.
 - למעשה דרך החשיבה בבעיות מסוג ה' דומה לזו של בעיות מסוג ד'. השוני העיקרי הוא במקום מהירות מדובר בבעיות אלה על הספק, וההספק נמדד ב"חלקי עבודה":
למשל, צינור ממלא (או מרוקן) $1/3$ בריכה בשעה (ואת כל הבריכה ב-3 שעות).
 - ו. **בעיות אחוזים ויחסים** (בעיות הקשורות בתמיסות, בקשר בין כמויות באחוזים וכדומה).
תיאור הקשר: קשר בין הכמות היסודית k , האחוז p ותמורת האחוז r : $r=pk/100$.
בבעיות "תערובת" העיקרון הוא שהכמויות שנכנסו לתערובת הן הכמויות היוצרות את התערובת (לא נגרע ולא נוסף כלום). משתנה רק היחס בין המרכיבים.
 - ז. **בעיות היגיון** – בעיות שפתרון דורש היגיון ולא דווקא חישובים.

השימוש במארגן חשיבה גרפי

מארגן חשיבה גרפי הוא טבלה העוזרת לחשוב בצורה מסודרת יותר. הוא מארגן בצורה חזותית את כל השאלות והתשובות המלוות את תהליך החשיבה. לתהליכי חשיבה שונים מתאימים מארגני חשיבה שונים. מחקרים הראו שמארגני חשיבה גרפיים משפרים את החשיבה בצורה מדהימה. הם עוזרים במיוחד ללומדים חזותיים, אבל מביאים תועלת לכל התלמידים. מארגן חשיבה בנוי היטב יהיה בעל התכונות הבאות: יציג יחסים חשובים בין חלקי מידע ובין צעדים בתהליך החשיבה; ינחה את התלמידים לאורך תהליך החשיבה; יאפשר לרשום בצורה מסודרת מידע שצריך לזכור.

הדרך הטובה ביותר לבניית מארגן חשיבה יעיל היא לבנות אותו בתוך כדי מהלך החשיבה. קשה לבנות מארגן חשיבה גרפי גמיש שיתאים לכל סוגי הבעיות.

לפניכם דוגמה למארגן חשיבה גרפי לאיתור בעיה ופתרונה. השאלות אינן סדרתיות - לעתים עונים על שאלה מאוחרת קודם, או חוזרים ומתקנים תשובה שכבר ענינו קודם. מספרי הסעיפים משמשים רק לצורך התייחסות אליהם.

נתחיל למלא את מארגני החשיבה הגרפיים בשיעור זה ונשלים את מילויאם בשיעורים הבאים, ולכן כדאי לשמור את הדפים.

תוכלו לאמץ דוגמה זו, או לנסות לבנות את מארגן החשיבה הגרפי הפרטי שלכם, זה אשר יתאים ביותר לצורת מחשבתכם. ייתכן גם שתוכלו לשפר אותו לאחר ההתנסות בפרקים הבאים.

איתור בעיה ופתרונה

1. **סוג הבעיה** (במה מדובר? איזו בעיה מוכרת זה מזכיר לי?)
2. **סיפור ראשוני של הבעיה בצורה המובנת לי:** (אפשרית כל דרך או מספר דרכים, למשל בסיפור מילולי, בתרשים, בציור, בטבלה, בראשי פרקים וכו')
3. **מהי המטרה?** (מה מבקשים ממני למצוא?)
4. **מה נתון?** (נתונים גלויים)
5. **היכן טמון הקושי?** (האם יש מלים לא ברורות? האם יש מלים שאינן מובנות בהקשר הבעיה? האם יש נתונים שלא ידוע לי כיצד להשתמש בהם?)
6. **קריאה בין השורות** (מהו קצה החוט שיוביל לפתרון? למה יש להתייחס בבעיה שיעזור לנו למצוא את המבוקש? האם ידוע לי על קשרים בין המשתנים? נוסחה? נתונים **סמויים** – מה חשוב ולא נאמר **במפורש** בסיפור?)
7. **הניסוח הטוב ביותר של הבעיה** (הניסוח המובן לי ביותר):
8. **פתרון או אומדן ללא חישוב** ("ניחוש מושכל" או הערכה – לא תמיד אפשרי):
9. **קביעת המשתנים** (כאשר הפתרון הוא אלגברי):
10. **שיטת הפתרון ופתרון מתמטי לבעיה:**
11. **אימות הפתרון:**



עבודה על דוגמאות בתיווך המורה

דוגמה 1

לצורך יש גוש מתכת אחד במשקל 400 גר' ש-30% ממשקלו זהב. הוא רוצה להתיך אותו עם גוש שני ש-40% ממשקלו זהב, ולקבל נתך שריכוז הזהב בו הוא 36%. כמה יקח מהגוש השני?

כדי להבין ולנסח מחדש את הבעיה יש לקרוא אותה מספר פעמים, כפי שתואר בפתיחת הפרק. יש להכין העתקים ריקים של מארגן החשיבה לכל התלמידים. אנו מבצעים **במקביל** שני דברים:

- מתארים בקול רם מה חשבנו אחרי כל קריאה של הבעיה;
- ממלאים את הסעיפים המתאימים במארגן החשיבה הגרפי (כזכור, יושלם המילוי בפרקים הבאים) מוצעות למורה שתי אפשרויות: (1) לבקש מהתלמידים לעשות זאת; (2) לשמש בעצמו מודל.

אחרי הקריאה הראשונה - ההתרשמותית - סיכום מחשבותי:

זוהי בעיה האדס'קה צורפ'ס או רופא' שניס, אך הניסוח שונה אדס'קה גס אחריס. (למשל, אילו דובר במלחם היא הייתה אדס'קה רוקח'ס). היא שייכת לסוג אומר של "בעיות אומג'ס" או "בעיות תערובת".

פעולה: מילוי סעיף 1 במארגן החשיבה הגרפי

לקריאה השנייה יש לגשת כשביד 60 או 80 פרוטו כדי להדגיש בקו את האילוסטרציות הבעיה.

אחרי הקריאה השנייה - הביקורתית - סיכום מחשבותי וניסוח מחדש:

גוש המתכת הראשון - משקלו 400 גר', מכיל 30% זהב. והשאר סג'ס. אחריס זאת בעצרת ציר. גוש המתכת השני - צריך לקחת ממנו משקל לא ידוע, מכיל 40% זהב. צריך לחשב מהו משקלו (ציר). אחרי שמדברים את שני הגושים, מקבלים גוש שמשקלו לא ידוע ומכיל 36% זהב (אוסיל לציר). משקל הגוש החדש (התערובת) הוא סכום משקלי שני הגושים. אבל הריבוי אינו סכום הריבויס.

פעולה: מילוי סעיף 2 ו-3 במארגן החשיבה הגרפי

היכן טאון פקוטי: להיזכר איך עושים חשבון עם אומג'ס - איך מתרגמים 30%, 40% ו-36% לכמות? איך אומג'ס כמה לקחת מהגוש השני? איך מסתדרים עם אומג' הזה?

פעולה: מילוי סעיף 5 במארגן החשיבה הגרפי

קצה החוט: בעיות כאלה תבניות הפסוקים מסתמכות על נוסחת הקשר בין הכמות היסודית k. האומג' p ותאורת האומג' r: $r = pk/100$. למשל צריך לטא את כמות הזהב (הגרמיס) ב-400 גר' נתן וכו'. יש לעשות את חשבון כמות הזהב בגרמיס. ואז סק הזהב בשני הגושים ייתן את כמות הזהב בגוש הסופי.

נתונים סאויים: ניתן לחשב ולדעת את כמות הזהב בגוש הראשון.

משקל גוש התערובת הוא סכום משקלי הגושים.

משקל הזהב בתערובת הוא סכום משקלי הזהב בגושים.

פעולה: מילוי סעיף 6 במארגן החשיבה הגרפי

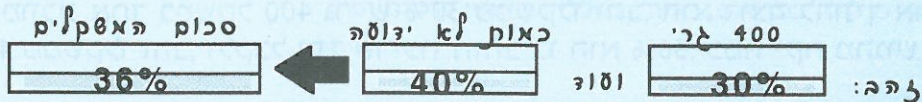
אחרי קריאה שלישית

לאחר השוואת הניסוח שלי ובעיה האילולית אני חושבת שהבנתי נכון את הבעיה.

איתור בעיה ופתרונה

נתונים

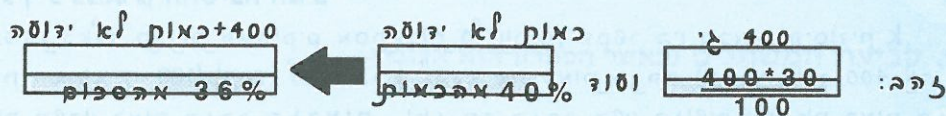
1. סוג הבעיה (במה מדובר? איזו בעיה מוכרת זה מזכיר לי?) בעלות אחוזים אל תעורבת.
2. סיפור ראשוני של הבעיה בצורה המובנת לך: (אפשרית כל דרך או מספר דרכים, למשל בסיפור מילולי, בתרשים, בצורה, בטבלה, בראשי פרקים וכו')



3. מהי המטרה? (מה מבקשים ממני למצוא?) לחשב את הכמות שיש לקחת מהגוש השני. הכדי לקבל, יחד עם הגוש הראשון כולו, נתק (תעורבת) בריכוז 36% זיהה.
4. מה נתון? (נתונים גלויים) גוש אחד: 400 גר - 30% זיהה
גוש שני: אשקל לא ידוע - 40% זיהה

5. היכן טמון הקושי? (האם יש מלים לא ברורות? האם יש מלים שאינן מובנות בהקשר של הבעיה? האם יש נתונים שלא ידוע לי כיצד להשתמש בהם?) להיזכר איך עושים חשבון עם אחוזים - איך מתרגמים 30%, 40% ו-36% לכמות? איך מוצאים כמה לקחת מהגוש השני? איך מסתדרים עם אחוז? הנהגה

6. קריאה בין השורות (מהו קצה החוט שיוביל לפתרון? למה יש להתייחס בבעיה שיעזור לנו למצוא את המבוקש? האם ידוע לי על קשרים בין המשתנים? נוסחה? נתונים סמויים - מה חשוב ולא נאמר במפורש בסיפור?) הבהיות כאלה תבניות הפסקים מסתמכות על נוסחת הקשר בין הכמות היסודית k , האחוז p ותאורת האחוז r : $r = p \cdot k / 100$. אשקל הנהגה בגוש הראשון $400 \cdot 30 / 100$ אשקל התעורבת הוא סכום האשקלים (הגרמים)
אשקל הנהגה בתעורבת הוא סכום אשקלי הנהגה בגושים (הגרמים)
צריך לעשות את החשבון על כמות הנהגה ואז סכום הנהגה בשני הגושים יתן את כמות הנהגה בגוש הסופי.
7. הניסוח הטוב ביותר של הבעיה (הניסוח המובן לי ביותר):



8. פתרון או אומדן ללא חישוב ("ניחוש מושכל" או הערכה - לא תמיד אפשרי):
9. קביעת המשתנים (כאשר הפתרון הוא אלגברי):
10. שיטת הפתרון ופתרון מתמטי לבעיה:
11. אימות הפתרון:

* דוגמה 2

המרחק בין בתיהם של רמי ודני

רמי רצה למדוד את המרחק מביתו לבית חברו דני. הוא הלך מביתו אל ביתו של דני וספר את צעדיו: מחצית הדרך ספר את צעדיו בזוגות, ובמחצית האחרת – בשלוש. מספר זוגות הצעדים היה גדול ב-150 ממספר השלוש. מהו המרחק בין בתיהם של רמי ודני?

והרי סיכום מחשבות התלמיד אחרי הקריאה הראשונה (ההתרשמותית):

ז'אנר כנראה בעיית דרכים.

• פעולה: מילוי סעיף 1 במארגן החשיבה הגרפי

והרי סיכום מחשבות התלמיד אחרי הקריאה השנייה (הביקורתית):

הפנמה היא שהצעדים שווים, והמרחק נמדד בצעדים. אבל אין כאן מהירות וזמן. זו איננה בעיית דרכים. ז'אנר חידה העוסקת באספרים. לפתרון הבעיה לא משנה מהו שאם של הילדים ואי הלק. חשוב שמדובר בשני ילדים כי מדובר במרחק בין שני בתים – מרחק הנמדד בצעדים.

• פעולה: תיקון סעיף 1 במארגן החשיבה הגרפי (כלומר, זוהי חידת מספרים).

אנני מבין איך הוא ספר ואם משמעות האספר 150.

• פעולה: מילוי סעיף 5 במארגן החשיבה הגרפי

נראה שהבעיה שבמחצית הראשונה נמדדת הדרך בזוגות צעדים. מה אין מבין מזה? כנראה שראי סופר לא אחרי כל צעד, אלא אחרי כל צעד שני. כלומר, אחרי שהלק 2 צעדים – ספר 1, אחרי שהלק 4 צעדים, ספר 2, אחרי שהלק 6 צעדים, ספר 3 וכו'. כלומר במחצית הראשונה של הדרך – מספר הזוגות שהוא יספור יהיה חצי ממספר הצעדים (למשל, אם יספור 100 זוגות יהיה פירוש הדבר שהלק 200 צעדים). במחצית השנייה נמדדת הדרך בשלוש צעדים. מכאן שראי סופר לא אחרי כל צעד, אלא אחרי כל צעד שלישי. כלומר, אחרי שהלק 3 צעדים – ספר 1, אחרי שהלק 6 צעדים, ספר 2, אחרי שהלק 9 צעדים, ספר 3 וכו'. כלומר במחצית השנייה של הדרך – מספר השלוש שספור יהיה שלישי ממספר הצעדים (למשל, אם יספור 100 שלשות יהיה פירוש הדבר שהלק 300 צעדים). ברור שמספר הצעדים בכל מחצית זהה. כלומר סה"כ הצעדים שנמדדו בזוגות שווה לסה"כ הצעדים שנמדדו בשלוש.

ברור גם שיש יותר זוגות מאשר שלשות. למשל, כאשר הוא ספר בזוגות אחרי 6 צעדים, הוא אמר 3, וכאשר הוא ספר בשלוש אחרי 6 צעדים, הוא אמר 2.

ניסוח מחדש: במחצית הראשונה של הדרך – הוא סופר בזוגות. האספר שהוא יקבל אקבל הוא חצי ממספר הצעדים. במחצית השנייה של הדרך – הוא סופר בשלוש. האספר שהוא יקבל הוא שלישי ממספר הצעדים. יש יותר זוגות מאשר שלשות ב-150. אבקים אנני לדעת כמה צעדים עבר רמי עד בית חברו. אולי ציור.

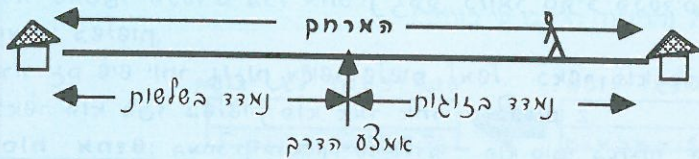
• פעולה: מילוי סעיפים 2, 3, 4 ו-6 במארגן החשיבה הגרפי, וציור.

אחרי קריאה שלישית – ניסוח מחדש של הבעיה באמצעות תרשים (אפשר גם להוסיף ביטויים אלגבריים, אבל נעשה זאת בפרק על הפתרון האלגברי).

לדעת הפנת' נכון את הבעיה. התרשים ובאקביל הפעברה לשפת האלגברה מקלים על ההבנה.

• פעולה: מילוי סעיף 8 במארגן החשיבה הגרפי. בשיעורים הבאים נמלא את סעיף 7 בביטויים אלגבריים ונוסיף אותם לתרשים שלנו.

איתור בעיה ופתרונה פארחק ב'ן בת' רא' ונ'

1. **סוג הבעיה** (במה מדובר? איזו בעיה מוכרת זה מזכיר לי?) ~~הסית דרכים~~ חידת אספרס
 2. **סיפור ראשוני של הבעיה בצורה המובנת לי:** (אפשרית כל דרך או מספר דרכים, למשל בסיפור מילולי, בתרשים, בציור, בטבלה, בראשי פרקים וכו')
 באחזית הראשונה של הדרך – סופר הזוגות. האספר שהוא יקבל מקבל הוא חצי אספר הצדים.
 באחזית השנייה של הדרך – סופר השלוש. האספר שהוא מקבל הוא שליש אספר הצדים.
 יש יותר זוגות מאשר שלשות ב-150. **אבססים** אמר לדעת כמה צדים עבר רא' עד בית חברו.
 3. **מהי המטרה?** (מה מבקשים ממני למצוא?)
 הדרך נאדדת הצדים. יש לחשב כמה צדים עבר רא' עד בית חברו.
 4. **מה נתון?** (נתונים גלויים)
 באחזית הראשונה. הדרך נאדדת הזוגות צדים. באחזית השנייה הדרך נאדדת השלוש צדים.
 אספר הזוגות גדול מאספר השלוש ב-150.
 5. **היכן טמון הקושי?** (האם יש מלים לא ברורות? האם יש מלים שאינן מובנות בהקשר הבעיה? האם יש נתונים שלא ידוע לי כיצד להשתמש בהם?)
 אינן אב'ן א'ק הוא ספר וזה אשמות האספר 150.
 6. **קריאה בין השורות** (מהו קצה החוט שיוביל לפתרון? למה יש להתייחס בבעיה שיעזור לנו למצוא את המבוקש? האם ידוע לי על קשרים בין המשתנים? נוסחה? נתונים סמויים – מה חשוב ולא נאמר במפורש בסיפור?) אספר הצדים בכל אחזית הוא זהה. כדי לאזן כמה צדים באחזית הראשונה. צריך לכפול את האספר שקיבל ב-2. באחזית השנייה כופלים ב-3.
 7. **הניסוח הטוב ביותר של הבעיה** (הניסוח המובן לי ביותר)
- 

פארחק

אחזית הדרך

נאדד השלוש

נאדד הזוגות

כאשר הוא ספר הזוגות הוא קיבל

אספר גדול ב-150 מאשר כאשר

הוא ספר השלוש
8. **פתרון או אומדן ללא חישוב** ("ניחוש מושכל" או הערכה – לא תמיד אפשרי):
 9. **קביעת המשתנים** (כאשר הפתרון הוא אלגברי):
 10. **שיטת הפתרון ופתרון מתמטי לבעיה:**
 11. **אימות הפתרון:**