

פרק 7: השערת פתרון – ניחוש מושכל, אומדן, בחירת הפתרון מבין תשובות אפשריות מוצעות

כלי החשיבה שנעסוק בו בפרק זה הוא הערכה מוקדמת של הפתרון.

מורים רבים נרתעים מלתת לגיטימציה לפתרון לא מסודר, שהינו הדבר הטבעי ביותר שהתלמידים עושים. אנו ממליצים על ניחוש מושכל, השערה או אומדן של פתרון הבעיה, כלומר ניחוש שיש לו על מה להסתמך, וזה, כמובן, שונה מניחוש פראי במקום פתרון. יש כאן, כביכול, סתירה לאחת ממטרותיה של הוראת המתמטיקה – פיתוח החשיבה המופשטת – אך כבר ציינו שבלימוד המתמטיקה יש לקיים מעבר מתמיד בין המוחשי לבין המופשט; התלמידים צריכים לדעת מה מצופה מהם כפתרון לפני שהם ניגשים לפתרון פורמלי. המורה יחליט אם ברצונו להיכנס לדיון בנושא – בעיות שפתרון היה צר או לא מתאים משום שהיעד הסופי שאליו היו רוצים להגיע לא הוגדר. ניתן להשתמש בדוגמאות מחיי יום יום או מן הפוליטיקה וההיסטוריה.

מתמטיקאי ידוע סיפר שפעם, במבחן שכתב בהיותו תלמיד באוניברסיטה, הוא לא הצליח להגיע לתשובה המצופה, שאותה שיער. הוא רשם לצד פתרונו הערה שלדעתו הפתרון צריך להיות כך וכך, אך זה אינו הפתרון שאליו הגיע בדרך פורמלית. בוחני העניקו לו את מלוא הציון, לאחר שהתברר שטעות שטותית גרמה לחוסר ההתאמה.

השערת או אומדן פתרון חשובים לכל התלמידים, מהסיבות שנמנה להלן. לתלמידים החלשים יש לכך חשיבות יתר: הצבת ערך מספרי במקום הפתרון עוזרת להם להמחיש את הבעיה, להבין אותה ולחוש אותה – זאת בתנאי שמיד לאחר הניחוש בודקים האם הוא אכן עונה על דרישות הבעיה. ניחוש לא נכון יכול להוות נקודת התחלה לדיון על השאלות – מה יודעים כבר על הפתרון, ומהן ציפיותינו מפתרון הגיוני.

בבעיות קשות להבנה עדיפה המחשה מספרית על אי הבנה.

פרק זה הוא המשך ישיר לפרק הקודם על מיפוי הבעיה. כאשר עומדת בפנינו בעיה כלשהי, ראשית עלינו לברר את כל מה שאנו יודעים על הבעיה, ואז עלינו לברר לעצמנו **לאן ברצוננו להגיע בסופו** של דבר: עלינו לברר לעצמנו מה אנו יודעים על פתרון אפשרי לבעיה, לאיזה פתרון(ות) אנו מצפים, ואז לנסות לשער או לאמוד פתרון. קיימת גישה חינוכית המגנה את הניחוש – כאילו הסיבה לניחוש היא שהמנחש אינו יודע כיצד לפתור את הבעיה באופן שיטתי, או אינו מוכן להתאמץ. ואולם, ההיפך הוא הנכון. הניחוש עוזר להבין טוב יותר את הבעיה על מטרותיה ונתונה, ותגליות והמצאות רבות מיוחסות לניחושים **מוצלחים**.

יחד עם זאת, סיכויי ההצלחה של ניחוש פשוט הם נמוכים ביותר. שיטת ה"ניסוי וטעייה" תצליח רק אם תהיה

מבוססת על נתונים. לכך אנו קוראים "ניחוש מושכל". נלמד דרכים לעשות זאת. בכל מקרה, יש לאמת את הניחוש ולראות שהוא אכן מהווה פתרון לבעיה.

קיימות בעיות במתמטיקה שעדיין לא נמצא להן פתרון מתמטי ולפי שעה הניחוש ("ניסוי וטעייה") הוא הדרך היחידה לפתור אותן (לדוגמה, בעית פרמה: הטענה היא שהשוויון $x^n + y^n = z^n$ מספרים שלמים אינו נכון כאשר $n > 2$. במשך שנים רבות לא הוכחה הטענה, למרות שהניחוש הוכיח שהמשוואה נכונה כאשר $n=1$, ו- $n=2$ [ואז המספרים מקיימים את משפט פיתגורס. הביאו דוגמאות!] ולא כאשר $n=3$ או n -ים גדולים יותר).

לא תמיד ניתן לנחש. במקרים כאלה רצוי לפחות להעריך את סדר הגודל של הפתרון (לתת פתרון "בערך" – בין ... לבין ...) לפני שטורחים לפתור את הבעיה באופן מסודר. היתרון בהשערת סדר הגודל או באומדן הפתרון הוא האפשרות לבדוק האם הפתרון המסודר שהגענו אליו הוא אכן הגיוני ומתקבל על הדעת. לעתים מציגים בפניכם בעיה, ומתחתייה מספר מוגבל של אפשרויות, שאחת מהן היא הפתרון הנכון והשאר מטרתן להסיח את דעתכם מהפתרון ולכן הן נקראות "מסיחים". אתם מתבקשים למצוא מבין האפשרויות האלה את האפשרות המתאימה ביותר. נלמד כיצד ניתן לעשות זאת.



1. **להתרגל לברר מהו(מהם) היעד(ים) של פתרון הבעיה** (לאו דווקא במתמטיקה): מה ברצוננו להשיג, איזה פתרון יספק אותנו, **לאן ברצוננו להגיע בסופו של דבר**. בעיות רבות, בעיקר בחיי היום-יום, נפתרות בצורה צרה או בלתי נכונה משום שהפותר לא ברר לעצמו מהם יעדיו.
2. **להתרגל לשער פתרון או פתרון מקורב כאמצעי להבין את הבעיה ולחוש את הפתרון** (לא תמיד ניתן לעשות זאת).
לדוגמה, אם בבעיה מדובר על ערבוב שתי כמויות מים בטמפרטורות של 20° ו- 40° , ושואלים מה תהיה הטמפרטורה של התערובת, חייבים לאמוד שהטמפרטורה תהיה בין 20° ל- 40° , קרובה יותר לטמפרטורה של הכמות הגדולה של המים (ולא סכום שתי הטמפרטורות). או אם שני פועלים ביצעו יחד עבודה מסוימת, הזמן שעבדו יחד יהיה בין מחצית הזמן הדרוש למהיר יותר לבצע את העבודה לבדו לבין מחצית הזמן הדרוש לאיטי יותר לבצע את העבודה לבדו.
2. **לפתח שיטות ל"פתרון ללא פתרון"** (ראו בהמשך).
3. **לפתח כלי ביקורת** (נוסף על הבדיקה הטכנית) לאימות הפתרון.
4. **לעתים** איננו יודעים לפתור בעיה בדרך אלגברית, וניחוש הוא הדרך היחידה להגיע לפתרון.

דוגמה לבעיה שבה חייבים לנחש, אך בצורה מושכלת

כששאלו את המושבניק חובב המתמטיקה מה מספר בעלי-החיים במשקו, הוא ענה: יש במשק יותר פרות מברווזים, מספר הראשים והרגליים של הפרות והברווזים הוא 100, ומספר הכבשים הוא $\frac{1}{3}$ ממספר הפרות והברווזים. כמה בעלי-חיים מכל סוג היו למושבניק?

סיפור הניסוח שלי: ובכן, ה'ו באשק x פרות ו- y ברואז'ים - ולפס 100 ראשים ורגל'ים. כבשים - של'ש מסכסס הברואז'ים והפרות יזוס $e - x > y$.

תנאי השוליון נתן את השולוא: $x + y + 4x + 2y = 100$ או $5x + 3y = 100$. זוא' משולוא בעלת שן נעלאים ש'ש לה אינסוף פתרונות. אבל התנאים המגבילים את מספר הפתרונות אינם ניתנים לניסוח במשולוא מתמטית (משולוא דיאלפנטית). צריך לנחש פתרון מתאים. **נתנים סאליים:** ו. x ו- y חייבים להיות מספרים שלמים. 2. סכום הפרות והברואז'ים מתחלק ב-3 (כי הכבשים מהווים של'ש ממספר ז'ה, וחייב להיות מספר שלם של כבשים).

3. y מספר המתחלק ב-5. ז'ה נובע מהמשולוא: 100 מתחלק ב-5 ו- $5x$ וזכאי מתחלק ב-5. מכאן $3y$ מתחלק ב-5. מאחר ש-3 אינו מתחלק ב-5, יוצא ש- y מתחלק ב-5.

$$\text{ננסה ונציב במשולוא } y=5: \\ 5x + 3 \cdot 5 = 100$$

$$5x = 85 \quad \text{---} \quad x = 17 \quad \text{אבל אז } x + y = 22 \quad \text{כלואר הסכום אינו מתחלק ב-3.}$$

$$\text{ננסה ונציב במשולוא } y=10: \\ 5x + 3 \cdot 10 = 100$$

$$5x = 70 \quad \text{---} \quad x = 14 \quad \text{ואז } x + y = 24 \quad \text{כלואר הסכום מתחלק ב-3.}$$

$$\text{אם ננסה ונציב במשולוא } y=15: \\ 5x + 3 \cdot 15 = 100$$

$$5x = 55 \quad \text{---} \quad x = 11 \quad \text{אבל אז מספר הברואז'ים גדול ממספר הפרות.}$$

כלואר **הפתרון** הא: יש 14 פרות, 10 ברואז'ים, ו-8 כבשים.

שיטת "האריה ביער"

שיטה מקובלת לניחוש היא שיטת "האריה ביער" – מחפשים את האריה, ולאט לאט מצמצמים את השטח שבו הוא עשוי להימצא עד שמוצאים אותו. במלים אחרות, מנחשים מספר, בודקים עד כמה הוא קרוב לפתרון, כלומר, מה גודל הטעות, ואז "מתקנים" את הטעות.

דוגמה לבעיה שבה מנחשים בשיטת "האריה ביער"

האב הוא בן 37 ובתו בת 5.

בעוד כמה שנים יהיה גיל האב גדול פי 3 מגיל בתו?

סיפור הניסוח של: גילי האב ובתו 37 ו-5. ידוע לי (נתן סאמי) שבעוד מספר שנים יגדלו גילי שניהם באותו מספר.

המטרה היא למצוא בעוד כמה שנים יהיה גיל האב גדול פי 3 מגיל בתו (צריך להשוות את גיליהם בעוד מספר שנים).

נימוש: היום גיל האב גדול פי כ-7 מגיל בתו. בעוד שנה יהיה האב בן 38 ובתו בת 6 – לא מתאים. בעוד שנתיים – 39 ו-7. אנסה ילקפול: בעוד 5 שנים – 42 ו-10 – פי 4.2. צריך לקפול שוב. בעוד 10 שנים – 47 ו-15 (פי 3.13 יותר מ-3). עכשיו אקפול שוב בקפיצות קטנות. בעוד 11 שנים יהיה האב בן 48 ובתו בת 16. בדיוק פי 3. **זהו הפתרון.**

הנימוש נעשה בקפיצות היינו עלולים לזלזל על הפתרון, ואז היה עלינו לחזור אחרת.

היור שהנימוש לא היה נתן פתרון מדויק אילו הפתרון לא היה מספר שלם (כלומר, אילו מספר השנים לא היה שלם).

דוגמה לבעיה הנפתרת בעזרת ניחוש מושכל

כשהייתי בן 13 היה אחי בן 6, אחותי בת 10, ואבי בן 41.

בעוד כמה שנים יהיה גיל אבינו שווה לסכום הגילים שלנו?

פתרון בדרך ההתקרבות לפתרון

היום סכום הגילים שלנו 29 ואבינו בן 41. עדיין גילו רחוק מסכום הגילים שלנו ה-12 שנים. בעוד שנה נגדל כולנו בשנה: סכום הגילים שלנו יהיה 32 – הסכום יגדל ה-3, ואבינו יהיה בן 42 (יגדל ה-1).

העצם בכל שנה סכום הגילים שלנו גדל ה-3 שנים ואבינו גדל ה-1 שנה, כלומר ההפרש בין סכום הגילים שלנו ואבינו של אבינו קטן ה-2. מכאן שבעוד 6 שנים יהיה סכום הגילים שלנו שווה לגיל אבינו.

אימות: בעוד 6 שנים יהיה גילי 19, גיל אחי 12, גיל אחותי 16, סכום גילינו יהיה אז 47. וזה יהיה גם גילו של אבינו.

שיטת ההליכה מן הסוף להתחלה

דרך נוספת להתקרב לפתרון היא ללכת מן הסוף להתחלה: להניח כאילו מצאנו את הפתרון, לנתח את תכונותיו, וכך להעלות רעיונות בקשר לדרך לפתרון (זוהי שיטה מקובלת בבעיות בנייה בגיאומטריה).

דוגמה לבעיה שבה מנחשים בשיטת ההליכה מן הסוף להתחלה

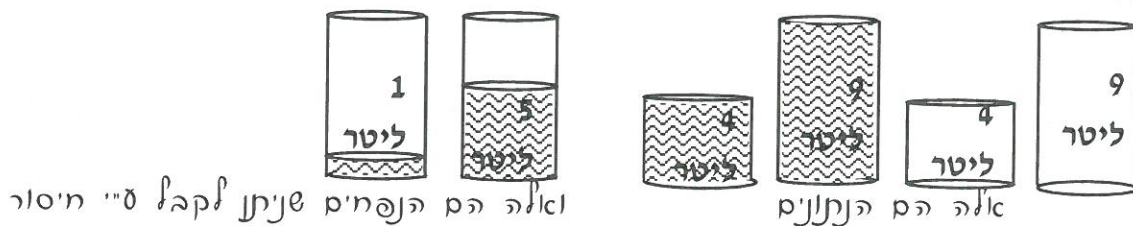
אספר לכם מה קרה לי: נכנסתי לאיזו חנות, לווייתי מבעל החנות מספר ש"ח כמספר הש"ח שהיו בארנקי, וקניתי חולצה ב-16 ש"ח. אז נכנסתי לחנות שנייה, ועשיתי את אותו הדבר (לווייתי כמספר הש"ח שהיו בארנקי, וקניתי חולצה ב-16 ש"ח). המשכתי לחנות שלישית, ושם שוב לווייתי וקניתי חולצה, אבל אחרי שקניתי את החולצה השלישית לא נשארה בארנקי פרוטה.

כמה כסף היה לי כשיצאתי מהבית?

ניתוח: הפעולה האחרונה הייתה קניית החולצה. לפני כן היו לי 16 ש"ח. אבל זה היה אחרי שלווייתי אבסל החנות סכום כזה לסכום שהיה בארנקי. מכאן שנכנסתי לחנות השלישית עם 8 ש"ח. בחנות השנייה קניתי ב-16 ש"ח, כלומר, לפני הקנייה היו לי 24 ש"ח. נכנסתי לחנות זו עם 12 ש"ח. בחנות הראשונה קניתי ב-16 ש"ח, לפני הקנייה היו לי 26 ש"ח. נכנסתי לחנות זו עם 13 ש"ח (להבהרה מואלף לרשום זאת בטבלה).

דוגמה נוספת לפתרון בשיטת ההליכה מן הסוף להתחלה

מעמידים לרשותכם שני כלים: האחד מכיל 9 ליטר, והשני מכיל 4 ליטר. עליכם להיעזר בשני הכלים האלה בלבד כדי להביא מהנהר בדיוק 6 ליטר.



ניתוח הנתונים: אין יכול למלא: 9 ליטר, 4 ליטר, 5 ליטר (אם אמלא את הכלי הגדול ואשפוך 4 ליטר לכלי הקטן, ו-1 ליטר (אם שוב אשפוך לכלי הקטן 4 ליטר). אבל זה לא פותר את הבעיה. **חשבתי אפסול להתחלה:** כדי שישארו לי בכלי הגדול 6 ליטר, אני צריך לרוקן מאני בדיוק 3 ליטר. איך אפשר זאת?

עלי לדאוג לכך שבכלי הקטן כבר יהיה 1 ליטר (זהו החלק החשוב ביותר בחשיבה). את זה אני יכול לעשות (איך?). ואז אמלא את הכלי הגדול, ואמזיג מאני לכלי הקטן 3 ליטר עד שיתמלא. החשיבה כאן כוללת חלוקת המשימה הסופית לתת-משימות. האקטיות את הארחק בין הבעיה והפתרון.

דוגמה לאומדן של הפתרון (דוגמה 1 בפרק הקודם)

לצורך יש גוש מתכת אחד במשקל 400 גר' ש-30% ממשקלו זהב, וגוש שני שאחוז הזהב בו הוא 40%. כמה עליו לקחת מן הגוש השני כדי לקבל נתך שריכוז הזהב בו הוא 36%? (היזכרו בניסוח מחדש של הבעיה).

ניתוח או אומדן: כאן קשה לנחש, אבל לפחות אוכל לאמוד. אילו היה הצולל לוקח כמות זפה (400 גר') מהגוש השני, היה ריכוז התערובת האמצעי בין הריכוזים, כלומר 35%. לכן ברור שלקח אן הגוש השני קצת יותר מ-400 גר' (אם אקבל בחישוב פחות מ-400, אז שטעיתי).

בחירת פתרון מבין שורה של אפשרויות מוצעות

הדרך ה"בטוחה" ביותר להחליט איזה הוא הפתרון הנכון היא לפתור את הבעיה ולמצוא איזה מהפתרונות המוצעים מתאים לפתרון שלכם. אבל שיטה זו דורשת זמן רב וחבל על הזמן. יש הצעות שעוד במבט ראשון רואים שאינן מתקבלות על הדעת ויש לפסול אותן. תוך הפעלת שיקול דעת פוסלים את ה"מסוימים" ונשארים עם התשובה הנכונה. כמובן, אם אחת מהאפשרויות אינה מתאימה, ייתכן שטעיתם בהבנת הבעיה, או שארעה טעות בניסוח הבעיה או בפתרונות המוצעים. ראשית, בידקו היטב את עצמכם לפני שתבואו בתלונות לאחרים.

בתרגילים הבאים אתם מתבקשים לנסות לפתור רק אם לא הצלחתם לפסול 3 אפשרויות. **הראו מדוע** אפשרות מסוימת מהווה פתרון לבעיה **ומדוע** שאר הפתרונות **אינם** מהווים פתרון לבעיה.

דוגמה לבחירת פתרון מבין מספר אפשרויות מוצעות (1)

שטחו של מלבן הוא 12 סמ"ר. מהו אורך צלעותיו אם היקפו הוא 14 ס"מ?

א) 2 ס"מ ו-6 ס"מ ב) 14 ס"מ ו-5 ס"מ ג) 8 ס"מ ו-6 ס"מ ד) 3 ס"מ ו-4 ס"מ

(כדאי להיעזר בשרטוט).

פסילה: ברור איז שאפשרות ב) נפסלת כי אורך צלע אחת שווה להיקף הנתון. אפשרות ג) אינה באה בחשבון כי אכפלת אורכי הצלעות (השטח) אינה 12 סמ"ר. באפשרות א) ההיקף הוא $2*6 + 2*2 = 16$ ס"מ. נותרת אס כן אפשרות ד), ואכן ההיקף מתאים.

דוגמה לבחירת פתרון מבין מספר אפשרויות מוצעות (2)

מכונית נוסעת במהירות 80 קמ"ש.

בכמה דקות תעבור $2/3$ ק"מ?

- (א) $2/3$ דקה (ב) $4/9$ דקה (ג) $1/2$ דקה (ד) 1 דקה

אומדן: אילו נסעה המכונית במהירות 60 קמ"ש הייתה עוברת 1 ק"מ בזמן $1/3$ דקה, ו- $2/3$ ק"מ ב- $2/3$ דקה. מכאן נובע שאפשרות (א) נפסלת, ושהצאן המבוקש הוא פחות מ- $2/3$ דקה, ולכן גם אפשרות (ד) נפסלת. ברור שיש לעבור ליחידות שונות – של ק"מ (אפשר גם מ') לדקה. המכונית נוסעת 80 קמ"ש ב- 60 דקות, כלומר $4/3$ ק"מ $(1/3)$ וק"מ (א"מ) בדקה. בחצי דקה תעבור $2/3$ ק"מ. ברור אם כן שאפשרות (ג) היא התשובה הנכונה.

דוגמה לבחירת פתרון מבין מספר אפשרויות מוצעות (3)

מכונית נסעה 300 ק"מ במהירות 50 קמ"ש, וחזרה לנקודת המוצא במשך 4 שעות. מה הייתה מהירותה הממוצעת?

- (א) 75 קמ"ש (ב) 50 קמ"ש (ג) 80 קמ"ש (ד) 60 קמ"ש

אומדן: מישור אפיר של המהירות בזמן חזרה אראה כי הייתה 75 קמ"ש. המהירות הממוצעת חייבת להיות מספר בין 50 ל-75. זה פוסל איז את אפשרויות (א), (ב) ו- (ג). נשארת אפשרות (ד). **בדיקה:** כדי לחשב מהירות ממוצעת צריך לדעת את הזמן הכולל ואת הצאן הכולל. הזמן הכולל: 600 ק"מ. הצאן הכולל: 6 שעות הלוק (300/50) ו- 4 שעות חזרה, כלומר, 10 שעות. המהירות הממוצעת היא $600/10=60$. ברור אפוא שאפשרות (ד) היא התשובה הנכונה.

סיכום – מה למדנו בפרק זה?

סכמו בכיתה מהם הדברים החשובים שלמדנו בפרק זה.

תרגילים ?

עבודה זו מומלץ לעשות בזוגות. היעזרו בכן או בבת זוגכם כדי להבין את הבעיה.

יש להשתדל לחשב רק אם אין ברירה.

- א. בפרק 6 התבקשתם להתחיל בפתרון בעיות ולשמור את מארגני החשיבה הגרפיים. חיזרו לבעיות שהתחלתם לפתור, והשתמשו במארגני החשיבה הגרפיים ששמרתם. סכמו כל מה שאתם יודעים על הפתרון לבעיה מבלי לפתור אותה באופן מסודר. אם אפשר, נסו אחת משיטות ה"ניחוש המושכל" שתוכל להביא לפתרון. אם אינכם מצליחים, נסו לאמוד את סדר הגודל או את התחום של הפתרון המצופה. בכל מקרה, ראשית יש לברר במה מדובר ומהם סוגי המידות המעורבים, **ולאמת** את הפתרון. רישמו את תוצאות עבודתכם בסעיף 9 במארגן החשיבה הגרפי.
- ב. בתרגילים הבאים בחרו באפשרות הנכונה ביותר.

1. יוסי יצא לטיול ארוך. בכל יום הוא צועד 8 שעות במהירות 3 קמ"ש. מהי מהירותו הממוצעת ביממה? (24 שעות).
 (א) 1 קמ"ש (ב) 2 קמ"ש (ג) 3 קמ"ש (ד) 24 קמ"ש
2. היחס בין שני מספרים הוא 7:4. ההפרש ביניהם הוא 18. מהם המספרים?
 (א) 20, 38 (ב) 24, 42 (ג) 12, 21 (ד) 4, 23
3. אב נותן לשני בניו 3,000 ש"ח ומבקשם לחלק ביניהם את הסכום ביחס של 2:3. כמה קיבל הבן בעל החלק הגדול?
 (א) 1,200 ש"ח (ב) 2,100 ש"ח (ג) 2,000 ש"ח (ד) 1,800 ש"ח
4. אב חילק בין שלושת בניו 8,800 ש"ח ביחס של 5:7:10. כמה קיבל הבן בעל החלק הקטן ביותר?
 (א) 2,000 ש"ח (ב) 4,000 ש"ח (ג) 1,500 ש"ח (ד) 3,000 ש"ח

5. ממוצע הציונים שלי עלה השנה ב-20% והוא עכשיו 96.
מה היה ממוצע הציונים שלי בשנה שעברה?

- (א) 72 (ב) 60 (ג) 80 (ד) 78

6. בדיוק 12% מהילדים בכיתה שותים חלב מדי ערב. כמה ילדים יש בכיתה?

- (א) 25 ילדים (ב) 12 ילדים (ג) 20 ילדים (ד) 30 ילדים

7. השנה נוכו 30% מהכנסותי למס-הכנסה. מה היו הכנסותי אם השכר הנקי שקיבלתי (נטו) היה 28,000 ש"ח?

- (א) 40,000 ש"ח (ב) 100,000 ש"ח (ג) 10,000 ש"ח (ד) 70,000 ש"ח

8. אחרי דיאטה חמורה שבה ירד 30% ממשקלי, היה משקלי של רונן 77 ק"ג.
מה היה משקלי לפני הדיאטה?

- (א) 56 ק"ג (ב) 70 ק"ג (ג) 103 ק"ג (ד) 110 ק"ג

9. בנבחרת כדורסל יש 5 שחקנים, שממוצע הגובה שלהם הוא 2.02 מ'.
אחד השחקנים, שגובהו בדיוק הגובה הממוצע, הוחלף באחר ועכשיו הגובה הממוצע הוא 2.04 מ'.
מהו גובה המחליף?

- (א) 2.02 מ' (ב) 2.04 מ' (ג) 2.12 מ' (ד) 2.08 מ'

10*. צב זחל במשך דקה במהירות 5 קמ"ש. אז התעייף וזחל עוד דקה במהירות 1 קמ"ש. איזו דרך עבר במשך שתי הדקות?

- (א) 20 מ' (ב) 100 מ' (ג) 120 מ' (ד) 1,200 מ'

11*. גנב בורח בריצה במהירות של 10 קמ"ש. בעל הבית רודף אחריו באופניים במהירות 13 קמ"ש. בכמה מצטמצם המרחק ביניהם בכל דקה? (רמז: חישבו על המהירות היחסית ביניהם).

- (א) 100 מ' (ב) 200 מ' (ג) 50 מ' (ד) 1 ק"מ

12*. בחנות יש 80 מכוניות, מתוכן 60 יפניות. חברת הרכש קנתה 40 מכוניות.
כמה מתוכן יפניות?

- (א) לכל היותר 40% (ב) לפחות 50% (ג) 40% (ד) לפחות 50%

13* אורכו של מלבן גדול ב-50% מרוחבו. מגדילים את האורך ב-20%, ומקטינים את הרוחב ב-20%. מהו היחס בין האורך והרוחב של המלבן החדש?

- (א) 9:2 (ב) 5:2 (ג) 18:4 (ד) 9:4

14* יוסי צועד 200 מ' בארבע דקות. ריקי צועדת 5 ק"מ בשעה. פי כמה גדולה מהירותו של אבי מזו של ריקי?

- (א) פי 1 (ב) פי $\frac{1}{3}$ (ג) פי $1\frac{2}{3}$ (ד) פי $\frac{2}{3}$

15* רונית כותבת 60 מכתבים ב-5 שעות.

דפנה כותבת 15 מכתבים ב-3 שעות.

רונית ודפנה עבדו יחד 5 שעות ואחר כך המשיכה רונית לעבוד במשך 5 שעות. כמה מכתבים הן כתבו?

- (א) 100 מכתבים (ב) 80 מכתבים (ג) 245 מכתבים (ד) 145 מכתבים

16* באזור מסוים בקנדה כל התושבים הם דוברי אנגלית או צרפתית או שתי השפות גם יחד.

80% מתושבי האזור הם דוברי צרפתית. 70% מתושבי האזור הם דוברי אנגלית.

כמה אחוזים מדברים רק צרפתית?

- (א) 30% (ב) 40% (ג) 80% (ד) 50%



הכללה ומודעות לתהליכי חשיבה לגבי "השערת פתרון – ניחוש מושכל, אומדן, בחירת הפתרון מבין תשובות אפשריות מוצעות"

נסו לברר לעצמכם מהן הדרכים שבהן אתם מנסים למצוא פתרון לבעיה או לחידה (לאו דווקא במתמטיקה).

נסו להצדיק פתרון "בערך" של בעיה.

נסו לחלק את הבעיות שבהן עסקתם בפרק זה לקבוצות לפי השיטה שבה הערכתם את הפתרון.

! תשובות

1. ברור שהמהירות הממוצעת ביממה קטנה מהמהירות הממוצעת שבה יוסי צועד. לכן אפשרויות ג) ו-ד) נפסלות.
יוסי צועד בכל יום 8 שעות במהירות 3 קמ"ש ועובר $24 = 3 \times 8$ ק"מ.
מהירותו הממוצעת ב-24 שעות היא 1 קמ"ש. תשובה א) היא התשובה הנכונה.
2. אפשרויות א) ו-ד) נפסלות מיד כי המספר השני בהן אינו מתחלק ל-7. באפשרות ג) ההפרש בין שני המספרים הוא 8. נשארת אפשרות ב). בדיקה: ההפרש $42 - 24 = 18$. נחלק את שני המספרים ב-6 (צמצום) ונקבל 4, 7. כלומר היחס ביניהם הוא 4:7.
3. האפשרות היחידה שניתן לפסול מיד היא א), שהיא פחות ממחצית הסכום. יחס של 2:3 פירושו שהסכום מתחלק ל-5 חלקים שווים. כל חלק הוא $3,000/5 = 600$.
הבן בעל החלק הגדול קיבל 3 חלקים, כלומר 1,800 ש"ח. תשובה ד) היא הנכונה.
4. יחס של 5:7:10 פירושו שהסכום מתחלק ל-22 חלקים שווים. כל חלק שווה ל- $8,800/22 = 400$.
הבן שקיבל את החלק הקטן ביותר קיבל 5 חלקים, כלומר 2,000 ש"ח. תשובה א) נכונה.
5. אפשרות א) ו-ג) נפסלות מיד כי 20% מהן אינו מספר שלם. 20% מ-60 הוא 12. זה אומר שבמקרה כזה היה הממוצע השנה צריך להיות 72. זה לא מתאים לנתון. לכן התשובה הנכונה היא ג).
6. במבט ראשון נדמה שאין מספיק נתונים. אבל במבט שני מתברר שרק האפשרות הראשונה הגיונית, ואז 12% מהילדים הם מספר שלם, שלא כמו בכל שאר המקרים.
7. 28,000 ש"ח הם 70% ממשכורתו. אחלק ב-7 כדי לקבל 10% (4,000 ש"ח), ואכפיל ב-10 כדי לקבל 100% (40,000 ש"ח). תשובה א) היא הנכונה.
8. אפשרויות א) ו-ב) נפסלות מיד, כי המשקל בהן נמוך מזה שאחרי הדיאטה. כאן נוח ללכת מן הסוף להתחלה, כלומר לחשב כמה ק"ג ירד רונן במשקל. 30% מ-110 הם 33, ולכן תשובה ד) היא הנכונה.
9. לא ייתכן שגובהו של המחליף זהה לממוצע הקודם, מפני שהוא העלה את הממוצע. נפסלת אפשרות א).
לא ייתכן שגובהו של המחליף זהה לממוצע החדש, מפני שהוא העלה את הממוצע. נפסלת אפשרות ב).
שםמוצע של 5 גדלים יגדל ב-2 ס"מ צריך סכום הגדלים לגדול ב- $10 = 5 \times 2$ ס"מ. זה יכול להיות רק אם גובה המחליף הוא 10 ס"מ מעל לממוצע הקודם, כלומר 2.12 מ'. לכן אפשרות ג) היא הנכונה.
10. בדקה הראשונה זחל הצב במהירות $5 \times 1000/60$ מ' לדקה. בדקה זו עבר $5000/60$ מ'.
בדקה השנייה הוא זחל במהירות $1 \times 1000/60$ מ' לדקה. בדקה זו עבר $1000/60$ מ'.
במשך שתי הדקות עבר $6000/60$ מ', כלומר 100 מ'. לכן תשובה ב) היא נכונה.

11. אילו שניהם היו רצים במהירות של 10 קמ"ש לא היה המרחק ביניהם משתנה. כאשר שניים מתקדמים באותו כיוון, המהירות היחסית שלהם זהה להפרש המהירויות ביניהם (מה שיגרום לבעל הבית להשיג את הגנב הוא יתרון המהירות של 3 קמ"ש).
 $3 \text{ קמ"ש} = 3,000/60 \text{ מ' לדקה} = 50 \text{ מ' לדקה}$.
 בכל דקה מצטמצם המרחק ביניהם ב-50 מ'. לכן תשובה ג) היא נכונה.
12. ייתכן שכל 40 המכוניות שהחברה קנתה היו יפניות, ייתכן ש-20 מכוניות היו יפניות והשאר – אחרות, וייתכן גם כל מצב בין שני מצבים אלה. כלומר, לכל היותר כל המכוניות היו יפניות, לכל הפחות מחצית מהן (50%) יפניות.
 כלומר, מכל האפשרויות המוצעות, רק תשובה ד) יכולה להיות נכונה.
13. נחשוב על רוחב של יחידה (נניח שהיחידה היא מטר). האורך של המלבן המקורי הוא 1.5 מטר.
 אורכו של המלבן החדש מהווה 120% מהאורך הישן: $1.5 \times 1.2 = 1.8$ מטר.
 רוחבו של המלבן החדש מהווה 80% מהרוחב הישן: $1 \times 0.8 = 0.8$ מטר.
 היחס בין האורך והרוחב של המלבן החדש: $1.8:0.8 = 18:8 = 9:4$. לכן תשובה ד) היא הנכונה.
14. יוסי צועד 50 מ' בדקה. אבי צועד $5000/60 = 83.33$ מ' בדקה.
 יוסי מהיר יותר, ולכן רק תשובה ג) נכונה.
15. רונית כותבת 60 מכתבים ב-5 שעות, 120 מכתבים ב-10 שעות.
 דפנה כותבת 15 מכתבים ב-3 שעות, 5 מכתבים בשעה, ו-25 מכתבים ב-5 שעות.
 רונית ודפנה כתבו יחד $145 = 25 + 120$ מכתבים. תשובה ד) נכונה.
16. אפשרות א) היא הנכונה. המעגל הגדול מסמל את כל דוברי הצרפתית. המעגל הקטן מסמל את כל דוברי האנגלית. השטח שבו יש חפיפה בין המעגלים מסמל את דוברי שתי השפות. סך כל השטח מסמל את סך כל התושבים (100%).

