

פרק 8: פתרון אלגברי של הבעיה, פירוש ואימות הפתרון

כלי החשיבה שנעסוק בו בפרק זה הוא **פתרון אלגברי של בעיה מילולית ואימותו**. כלי זה כולל בניית משוואות, מציאת קבוצת האמת של המשוואות ואימות הפתרון.

פרק זה הוא המשך ישיר של שני הפרקים הקודמים, ומסתמך על כל הפרקים הקודמים. כל הפרקים הבאים מהווים השלמה לפרק זה:

ממחקרים מתברר שמומחים לפתרון בעיות משקיעים זמן רב בחיפוש שיטות חלופיות להצגת הנתונים, כי הדבר עוזר להם להבין ולהגדיר את הבעיה ואת מטרותיה ולפיכך עוזר לפתרונה. בנושא זה דן הפרק על שיטות להצגת נתונים.

כאשר עסקנו בנתונים גלויים וסמויים יצאנו מתוך הנחה שכל הנתונים נמצאים וצריך רק לגלות אותם. אולם קיימים מצבים שבהם חסרים נתונים, או קיימים נתונים מיותרים, או נתונים סותרים. בנושא זה יעסוק הפרק על בחינת הנתונים.

כאשר הבעיות מורכבות יש לפרקן לחלקיהן. בזאת דן הפרק על פירוק לשלבים של תהליך פתרון הבעיות.

לשם ביסוס "הבנת הנקרא", כלומר, כדי לדעת לקרוא, יש לדעת לכתוב. זאת עושים בעזרת כתיבת בעיות דומות לבעיות שכבר נתקלנו בהן בפרק על המצאת בעיות מילוליות.

עכשיו, אחרי שהבנתם מהי הבעיה, מה נתון לנו ומה מבקשים מאיתנו, ואחרי שחקרתם את הפתרון הצפוי, אתם רוצים לפתור את הבעיה בדרך אלגברית שיטתית, לבחון את הפתרון, ולחשוב על הדרך שעברתם כדי להבין אותה לעומקה ועל-מנת שתעזור לכם בפתרון בעיות בעתיד.



1. ליישם את מה שלמדנו בפרקים הקודמים: על שימוש נכון ביחידות, על הפיכת בטויים מילוליים לביטויים אלגבריים ועל הסקת מסקנות מיידיות. מה שלמדנו יעזור לנו לקבוע את המשתנים הגלויים והסמויים ולעמוד על הקשרים בין הנתונים לבין עצמם ובין הנתונים והמטרה על-מנת לתרגם את הסיפור המילולי המנוסח מחדש למשוואות.

2. לפתח שיטות לפתרון בעיות. מחקרים הוכיחו שמומחים לפתרון בעיות מקדישים זמן רב יותר מאשר טירונים לחיפוש אחר שיטות אפשריות לפתרון הבעיה העומדת בפניהם.

המומחים נוהגים להפעיל **חשיבה אנלוגית**, כלומר משתמשים בהתנסויות הקודמות שלהם כדי לנסות ולמצוא צדדים שווים או דמיון בין בעיות מוכרות להם ובין הבעיה הנידונה. האנלוגיה חוקרת את התכונות הדומות של הבעיות. ההנחה היא שאם יתגלו תכונות משותפות בין הבעיה הנידונה לבין בעיה מוכרת, יש סיכוי שגם שיטת הפתרון תהיה דומה.

כפי שכבר ציינו בפרק 6, יש להיזהר בקביעת אנלוגיה, כי טעות בקביעת התכונות הדומות עלולה להוביל לתוצאות מוטעות.

3. **להשתמש בטכניקות ידועות** (פתרון משוואה, פתרון מערכת משוואות) **לשם מציאת פתרון אלגברי למשוואות שבנינו, ולבדוק את הפתרון האלגברי.**

4. **לפרש את הפתרון האלגברי** שקיבלנו ולבדוק האם הוא הושג על-ידי שימוש בכל הנתונים, והאם הוא מהווה תשובה סבירה לבעיה.

5. **לנתח את הפתרון ולפתח מודעות לתהליך החשיבה והפתרון.** עניין זה הוא בעל חשיבות לא רק לגבי פתרון הבעיה הנידונה אלא גם לגבי פתרון בעיות בעתיד.

המודעות לתהליך החשיבה תהפוך לבלתי אפשרי את המשפט המוכר כל-כך: "אני חושב/ת שפתרתי את הבעיה". פותר המודע לתהליך החשיבה יודע לבטח האם הצליח לפתור את הבעיה או לא. אם הפותר בטוח שאכן הבין והגדיר נכון את הבעיה, את הנתונים ואת המטרות, ואם הוא בטוח שאכן לא חסרים נתונים ואין נתונים מיותרים, ואם הצליח להציב נכון את המשוואות, ופתר אותן, הוא יהיה גם בטוח שפתר את הבעיה וייגש לפירוש הפתרון ולאומותו. לעומת זאת, אם הוא נתקל בקושי באחד מצעדים אלה, הוא יהיה בטוח שלא פתר את הבעיה וכי עליו לחפש דרך אחרת לפתרונה.

כדאי לבחון את התהליך שהוביל מהבנת הנתונים אל המטרה. יש לבדוק: מה היו הקשיים שעמדו בדרך? כיצד התגברנו עליהם? האם אפשר לקצר את התהליך? האם אפשר לשפר אותו? האם אפשר לפתור את הבעיה בדרך אחרת? האם קביעת משתנה אחר הייתה משנה את הפתרון? במה? מודעות לתהליך הפתרון תתרום לפתרון בעיות דומות, כפי שאמר המתמטיקאי והפילוסוף הצרפתי רנה דקרט: "כל בעיה שפתרתי הפכה לכלל שישמש אותי לפתור בעיות אחרות".

כאן יש מקום לדון במליאת הכיתה, בעזרת דוגמאות, בשאלה מהו הדמיון ומהו השוני בין פתרון בעיות בחיים לבין פתרון בעיות במתמטיקה. בפתרון בעיה כלשהי, יש להבין את הבעיה ולהגדירה היטב, ולבדוק שלפנינו כל הנתונים וכל הדרישות שהבעיה מעמידה. בדרך כלל, הגדרת הבעיה רומזת לגישות ולשיטות לפתרון. בחיים לא תמיד ניתן להגדיר את הבעיה ואת הנתונים והדרישות, לא תמיד קיימים כל הנתונים ולא תמיד יודעים איך למצוא אותם. וגם אחרי שנמצא פתרון כלשהו, פעמים רבות קשה להיות בטוחים כי זהו הפתרון הנכון. במתמטיקה, בדרך-כלל, הנתונים הדרישות והמטרה כולם מוגדרים, והבנתם גוררת, בדרך-כלל, גם דרך פתרון שניתן לאמתו בנקל.

שיטת העבודה

כדאי לקיים דיון בכיתה על השלבים של פחרון בעיה, כולל השלבים שעליהם עברנו בשני השיעורים הקודמים. רצוי לרשום את השלבים המוצעים על הלוח. בבעיות פשוטות, לעתים חלק מהשלבים מיותר. בבעיות מורכבות ייתכן שיהיה צורך להזכיר נושאים שידונו בפרקים הבאים. להלן מוצעים שלבים לפחרון בעיות מילוליות במתמטיקה.

בשני הפרקים הקודמים טיפלתם בבעיות, ועברתם מספר שלבים לקראת הפחרון השיטתי והמסודר **בעזרת מארגן החשיבה הגרפי**:

1. **קראתם** את הבעיה לפחות פעמיים, ניסיתם לשייך את הבעיה לסוג בעיות מוכר.
2. הבנתם היטב במה מדובר ו**מיפיתם את "עולם הבעיה"**. סיפרתם (בניסוח שלכם) את הפרטים העיקריים (לעצמכם, לחבר או בכתב) ובמידת האפשר הצגתם את הבעיה בעזרת ציור או תרשים. בשלב זה קבעתם מהם סוגי המידות שעליהם מדובר ב"סיפור".
- השוויתם את הניסוח שלכם עם הבעיה המקורית כדי לבדוק האם כל הפרטים החשובים הובאו בחשבון (ראו פרק 6 וכן פרק 2).
3. רשמתם **מהי מטרת הבעיה**, כלומר מה מבקשים למצוא או לדעת.
4. רשמתם **מהם הנתונים הגלויים**.
5. ניסחתם **היכן טמון הקושי**.
6. ניסיתם לקרוא בין השורות על-מנת למצוא את הקשר בין הנתונים (מה חשוב ולא נאמר במפורש בסיפור שקיבלתם) ו**מצאתם נתונים סמויים**.
7. **ניסחתם את הבעיה שוב** בצורה המובנת לכם ביותר (בצורה מילולית ו/או בטבלה או בתרשים וכ"ו) כך שתוכלו "לתרגם" אותה בקלות למשוואות אלגבריות.
8. על-סמך הידוע לכם **ניסיתם לנחש פחרון**. אם לא הצלחתם, לפחות ניסיתם לאמוד את הפחרון ולהעריך באיזה תחום הוא נמצא (ראו פרק 7).

בפרק זה נמשיך בטיפול בבעיות אלה. **אנא הכינו את מארגני החשיבה שהתחלתם למלא בשיעורים הקודמים.**

בהמשך נרצה להוסיף דברים לסעיפים שכבר מלאנו ולמלא סעיפים נוספים.
מה נשאר לעשות?

כחלק מן ה"תרגום" משפה מילולית לשפת האלגברה עלינו:

9. **לקבוע משתנה** (או משתנים, אם אי-אפשר להסתפק במשתנה אחד) עבור גודל (או גדלים) שמעוניינים לדעת. בדרך-כלל, המשתנה הוא אחד הדברים שעליהם שואלים. המשתנה הוא אחד הנתונים (גלוי או סמוי). יש להוסיף זאת במארגן החשיבה הגרפי.
- 9א. להשתמש במשתנים כדי **לבנות תבניות מספר** עבור גדלים אחרים התלויים בהם. יש להוסיף את תבניות המספר, ליד הגדלים המתאימים, במארגן החשיבה בגרפי.
- 9ב. בעזרת הקשר שניסחנו בין המשתנים ובאמצעות תבניות המספר והנתונים, יש **לבנות משוואה או משוואות**, המתארות את התנאים שב"סיפור". יש להוסיף את המשוואות לסעיף 7 במארגן החשיבה הגרפי (הניסוח הטוב ביותר של הבעיה).

תהליך הפתרון המתמטי: התרת המשוואות (מציאת קבוצת האמת של המשוואות).

10. **לבדוק האם מספר המשוואות שווה למספר המשתנים**. אם מספר המשוואות קטן ממספר המשתנים לא נוכל לקבל פתרון יחיד. במקרה זה כדאי לבדוק אולי קיים נתון סמוי (למשל, המספרים שלמים, חד-ספרתיים וכדומה), שלא הובא בחשבון. אם מספר המשוואות גדול ממספר הנתונים – קיימים נתונים מיותרים. ייתכן גם שהמשוואות סותרות, ואז לא ייתכן פתרון. אם לא ניתן לפתור – **רישמו** זאת בסעיף 10 במארגן החשיבה הגרפי.
- 10א. אם ניתן לפתור, יש לנסות ולפתור את המשוואות ולמצוא את קבוצת האמת של המשוואה בדרך אלגברית. **רישמו** זאת בסעיף 10 במארגן החשיבה הגרפי.
- יהיו מקרים (למשל, אם המשוואה המתקבלת היא ממעלה שלישית או יותר, שבהם איננו יודעים להתיר את המשוואה בדרך אלגברית, ואז יש לנסות לפתור בדרך אחרת (למשל, בדרך גרפית).
- אם נתקלים בקושי באחד הצעדים עד כה, יש לחזור אחורה ולבדוק האם יש טעות או האם יש לנקוט בשיטת הצבה ו/או פתרון אחרת. אחרת – ממשיכים.

חזרה משפת המתמטיקה לשפה המילולית – פירוש ואימות הפתרון.

- 10ב. **לנסח את הפתרון המלא במלים, ולרשום** זאת בסעיף 10 במארגן החשיבה הגרפי.
11. **לאמת** האם הפתרון עונה על כל נתוני הבעיה – **על-פי ה"סיפור" ולא על-פי הביטוי המתמטי שנתתם לו** (האם הפתרון שהתקבל לוקח בחשבון את כל הנתונים והאם הוא סביר), **ולרשום** זאת בסעיף 11 במארגן החשיבה הגרפי.

מודעות לתהליך החשיבה.

12. לבצע חשיבה על החשיבה והסקת מסקנות.

שלבים בפתרון בעיה מילולית במתמטיקה

1. לקרוא את הבעיה פעמיים, ולנסות לשייך אותה לסוג בעיות מוכר.
2. להבין היטב במה מדובר ולמפות את "עולם הבעיה".
3. לרשום מהי מטרת הבעיה, כלומר מה מבקשים למצוא או לדעת.
4. לרשום מהם הנתונים הגלויים.
5. לנסח היכן טמון הקושי.
6. לנסות לקרוא בין השורות על-מנת למצוא נתונים סמויים.
7. לנסח את הבעיה שוב בצורה המובנת לכם ביותר.
8. על-סמך הידוע לכם לנסות לנחש או לאמוד את הפתרון.
9. לקבוע משתנה (או משתנים).
- 9א. להשתמש במשתנים לבניית תבניות מספר לגדלים תלויים.
- 9ב. לבנות משוואה או משוואות, המתארות את התנאים שב"סיפור".
10. לבדוק האם מספר המשוואות שווה למספר המשתנים.
- 10א. לפתור את המשוואות ולמצוא את קבוצת האמת של המשוואה.
- 10ב. לנסח את הפתרון המלא במלים.
11. לאמת האם הפתרון עונה על כל נתוני הבעיה - על-פי ה"סיפור".
12. לבצע חשיבה על החשיבה והסקת מסקנות.



עבודה על דוגמאות בתיווך המורה

דוגמה 1

למצוא שני מספרים (מקרה שבו התרגום הוא כמעט אוטומטי)
מיצאו שני מספרים שסכומם 15, והאחד גדול פי שניים מהשני.

- 7-1. מיפוי הבעיה וניסוח מחדש: מדובר בשני מספרים שסכומם 15, והאחד גדול מהשני פי 2.
8. ניסיון ל"ניחוש מושכל" של פתרון: ניתן להבין מהנתונים שסכום המספרים גדול פי שלושה מהמספר השני, ולכן המספר השני הוא $15/3=5$. המספר הראשון גדול פי שניים – 10. סכום המספרים יהיה $10+5=15$.

"תרגום" משפה מילולית לשפת האלגברה

9. לקבוע משתנה (או משתנים, אם אי אפשר להסתפק במשתנה אחד) עבור גודל (או גדלים) שמעוניינים לדעת. בדרך כלל המשתנה הוא אחד הדברים שעליהם שואלים.

מתמטיקה

עברית

x, y

מיצאו שני מספרים

9. בעזרת הקשר שניסחנו בין המשתנים ובאמצעות תבניות המספר והנתונים, יש לבנות משוואה או משוואות המתארות את התנאים שב"סיפור".

מתמטיקה

עברית

$x+y=15$

(תנאי ראשון) שסכומם 15

$x=2y$

(תנאי שני) האחד גדול פי שניים מהשני

פתרון אלגברי:

$x+y=15$

המשוואות המתאימות:

$x=2y$

10. לבדוק האם מספר המשוואות שווה למספר המשתנים.
מספר המשוואות שווה למספר המשתנים. אם מספר המשוואות קטן ממספר המשתנים לא ניתן לקבל פתרון יחיד. רואים שיש כאן שתי משוואות בלתי-תלויות ובלתי-סותרות ושני משתנים.

10א. לנסות לפתור את המשוואות ולמצוא את קבוצת האמת של המשוואה בדרך אלגברית.

קבוצת האמת של משוואות אלה: $\{x=10, y=5\}$

פירוש ואימות הפתרון:

10ב. לנסח את הפתרון המלא במלים.

המשמעות המילולית של קבוצת האמת: המספר האחד הוא 10, והשני הוא 5.

11. לאמת האם הפתרון עונה על כל נתוני הבעיה – על-פי ה"סיפור" ולא על-פי הביטוי המתמטי שנתת לו (האם הפתרון שהתקבל לוקח בחשבון את כל הנתונים והאם הוא סביר).

סכום שני המספרים $5+10=15$, והאחד גדול פי 2 מהשני $10=2*5$. (הפתרון הושג על-ידי שימוש בכל הנתונים, והוא סביר).

מודעות לתהליך החשיבה:

12. לבצע חשיבה על החשיבה שהפעלנו והסקת מסקנות.

בדוגמה זו ה"תרגום" הוא כמעט אוטומטי, הפתרון לא דורש התעמקות רבה בבעיה, בניית המשוואה המתאימה היא מיידית וכך גם שאר השלבים.

דוגמה 2

המרחק בין בתיהם של רמי ודני (בעיית הצעדים שהתחלנו לטפל בה בפרק 6).
רמי רצה למדוד את המרחק מביתו לבית חברו דני. הוא הלך מביתו אל ביתו של דני וספר את צעדיו: מחצית דרך ספר את צעדיו בזוגות, ומחצית אחרת – בשלשות. מספר זוגות הצעדים היה גדול ב-150 ממספר השלשות. מהו המרחק בין בתיהם של רמי ודני?

שלבים 1-7 בוצעו בפרק 6, שלב 8 בוצע בפרק 7 (ראו שם, וראו מארגן חשיבה גרפי שמילאתם באופן חלקי). בהמשך נשלים את הפתרון, נוסיף ביטויים אלגבריים לסעיפים שכבר מילאנו במארגן החשיבה הגרפי, ונשלים את הסעיפים החסרים.

"תרגום" משפה מילולית לשפת האלגברה

9. לקבוע משתנה (או משתנים, אם אי אפשר להסתפק במשתנה אחד) עבור גודל (או גדלים) שמעוניינים לדעת. בדרך כלל המשתנה הוא אחד הדברים שעליהם שואלים.

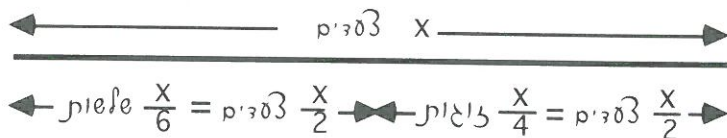
אחשבה: בדרך כלל אסמך ב- x את הגודל ששואלים עליו. במקרה זה – מספר הצעדים הכולל. אסמך זאת ב- y נסיון. ייתכן שיהיה קל יותר לפתור אם אסמך את x אמרת נראה.

ניסוח: x – מספר הצעדים בין שני הבתים. (זהו גם המרחק בין הבתים כשהוא נמדד בצעדים). להוסיף למארגן החשיבה הגרפי.

9א. להשתמש במשתנים כדי לבנות תבניות מספר עבור גדלים אחרים התלויים בהם. להוסיף למארגן החשיבה הגרפי בסעיפים שבהם נרשמו הנתונים הגלויים והסמויים.

$x/2$ – מחצית הדרך, כשיחידת המדידה היא צעדים.

מחשבה: ברור שכדי לדעת מה מספר הצלעות – יש לחלק את מספר הצדדים ב-2, וכדי לדעת מה מספר השלשות יש לחלק ב-3.

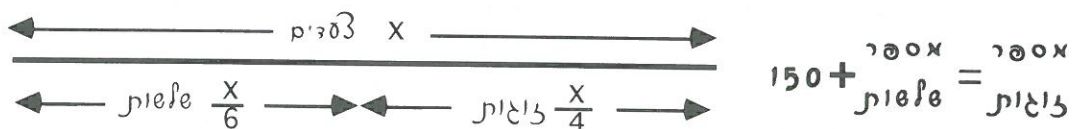


$(x/2)/2 = x/4$ – מספר זוגות צעדים במחצית הדרך.

$(x/2)/3 = x/6$ – מספר שלשות צעדים במחצית הדרך.

9ב. בעזרת הקשר שניסחנו בין המשתנים ובאמצעות תבניות המספר והנתונים יש לבנות משוואה או משוואות, המתארות את התנאים שב"סיפור". להוסיף למארגן החשיבה הגרפי.

מחשבה: פתרון אלגברי כרוך בכתיבת משוואה שתקשר בין $x/4$, 150, $x/6$. יש יותר צלעות מאשר שלשות לכן צריך להוסיף למספר השלשות 150 כדי לקבל את מספר הצלעות (או לחסר 150 ממספר הצלעות כדי לקבל את מספר השלשות).



$$x/4 = x/6 + 150$$

10. לבדוק האם מספר המשוואות שווה למספר המשתנים.

מספר המשוואות שווה למספר המשתנים (1).

10א. לנסות לפתור את המשוואות ולמצוא את קבוצת האמת של המשוואה בדרך אלגברית.

פותרים משוואה בנעלם אחד ממעלה ראשונה.

קבוצת האמת של המשוואה היא: $\{x=1,800\}$

למלא סעיף 10 במארגן החשיבה הגרפי.

פירוש ואימות הפתרון:

110. לנסח את הפתרון המלא במלים.
 המשמעות המילולית של קבוצת האמת: המרחק בין שני הבתים הוא 1,800 צעדים.
 מספר הצעדים בחצי המרחק הוא: 900 צעדים.
 מספר זוגות צעדים במחצית הדרך הוא: $900/2 = 450$
 מספר שלשות צעדים במחצית הדרך הוא: $900/3 = 300$

11. לאמת האם הפתרון עונה על כל נתוני הבעיה – על-פי ה"סיפור" ולא על-פי הביטוי המתמטי שנתתם לו. (האם הפתרון שהתקבל לוקח בחשבון את כל הנתונים והאם הוא סביר).

מספר זוגות הצעדים במחצית הדרך (450) גדול ב-150 ממספר השלשות במחצית הדרך (300).

למלא סעיף 11 במארגן החשיבה הגרפי.

ראו בעמוד הבא כיצד נראה מארגן החשיבה הגרפי עתה. שימו לב לשינויים!

מודעות לתהליך החשיבה:

12. לבצע חשיבה על החשיבה ולהסיק מסקנות.
אחשוב: אילו הייתי אסמן ב-x את מספר הצלחות או פתרון האשליה היה קצת יותר קל. אבל צריך לזכור לטא אחר-כך את מספר הצלחות במחצית מספר הצלחות כי זה הדבר ששואלים עליה בבסוף.
הכללה: אילו היה רא' סופר את הצלחות הרביות לצדדים ובחמישיות לצדדים, אילו ההבדל בין הספרות היה שונה מ-150 – החשיבה לא הייתה משתנה וגם הצבת הנתונים הייתה נכונה.

קביעת המשתנה היא עניין שרירותי. בדרך כלל בוחרים את המשתנה כדבר שעליו שואלים. לעתים הפותר בוחר במשתנה אחר מסיבות של נוחיות או של חשק.

כמובן שקביעת המשתנים בצורות שונות גוררת משוואות שונות ובעקבות כך פתרונות שונים ופירושים שונים.

לא תמיד קבוצת האמת של המשוואות הוא הדבר שמבקשים לדעת בבעיה.

כאשר מבצעים את הדוגמה שזה עתה ראינו בכיתה, כדאי לחלק את הכיתה לקבוצות ולבקש מכל קבוצה לבחור משתנה שונה. למשל,

קבוצה א' תסמן ב-x את מספר הזוגות.

קבוצה ב' תסמן ב-x את מספר השלשות.

קבוצה ג' תסמן ב-x את מספר הצעדים במחצית הדרך.

קבוצה ד' תסמן ב-x את מספר הצעדים בדרך כולה.

מבקשים מכל קבוצה לפתור ואז להשוות ולראות שכל קבוצה קיבלה טבלאות, תרשימים וקבוצת אמת שונים.

כאן המקום לדון בשאלה מדוע קרה הדבר, להגיע למסקנה שהדבר נובע מבחירה שונה של המשתנה, ולבקש מכל קבוצה לפרש את הפתרון ולאמת אותו.

איתור בעיה ופתרונה האומדן בין בית רא' וב'

- 1. סוג הבעיה** (במה מדובר? איזו בעיה מוכרת זה מזכיר לך?) בעיית זרימה - מיצת אספרס
- 2. סיפור ראשוני של הבעיה בצורה המובנת לי:** (אפשרית כל דרך או מספר דרכים, למשל בסיפור מילולי, בתרשים, בציור, בטבלה, בראשי פרקים וכו')
באחזית הראשונה של הדירק - סופר זוגות. האספר שהא' קיבל אקבל הוא חצי מאספר הצעדים באחזית השנייה של הדירק - סופר בשלוש. האספר שהא' קיבל הוא שליש מאספר הצעדים יש יותר זוגות מאשר שלשות ב-150. **אמני' לזכות כמה צעדים עבר רא' עד בית חבירו.**
- 3. מהי המטרה?** (מה מבקשים ממני למצוא?)
הדירק נאמדת הצעדים. יש לחשב כמה צעדים עבר רא' עד בית חבירו (אפ"X).
- 4. מה נתון? (נתונים גלויים)**
באחזית הראשונה של הדירק. הדירק נאמדת זוגות צעדים באחזית השנייה של הדירק נאמדת בשלוש צעדים. בכל אחזית $\frac{x}{2}$ צעדים באחזית הראשונה $\frac{x}{4}$ זוגות צעדים באחזית השנייה $\frac{x}{6}$ זוגות צעדים אספר זוגות גדול מאספר השלוש ב-150. $\frac{x}{4} = \frac{x}{6} + 150$
- 5. היכן טמון הקושי?** (האם יש מלים לא ברורות? האם יש מלים שאינן מובנות בהקשר הבעיה? האם יש נתונים שלא ידוע לי כיצד להשתמש בהם?)
אינני מבין איך הוא ספר ואם משמעות האספר 150.

- 6. קריאה בין השורות** (מהו קצה החוט שיוביל לפתרון? למה יש להתייחס בבעיה שיעזור לנו למצוא את המבוקש? האם ידוע לי על קשרים בין המשתנים? נוסחה? נתונים סמויים - מה חשוב ולא נאמר במפורש בסיפור?) אספר הצעדים בכל אחזית זהה כדי למצוא כמה צעדים באחזית הראשונה. לריק לכפול את האספר שקיבל ב-2 באחזית השנייה כפולים ב-3.
- 7. הניסוח הטוב ביותר של הבעיה** (הניסוח המובן לי ביותר)

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\text{צעדים } x} \xrightarrow{\text{אספר}} \\ \xleftarrow{\text{שלוש } \frac{x}{6}} \xrightarrow{\text{זוגות } \frac{x}{4}} \end{array} \quad \text{אספר} = \text{שלוש} + 150$$

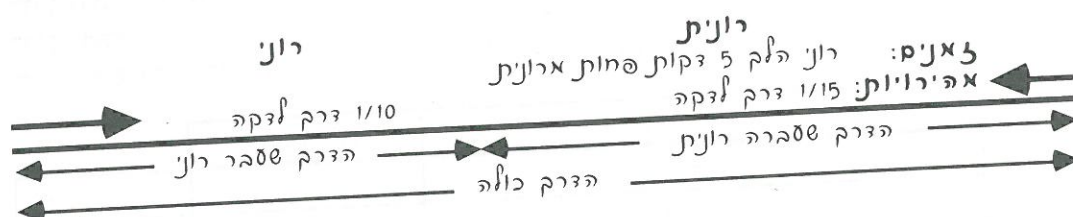
- 8. פתרון או אומדן ללא חישוב** (רק "ניחוש משוכלל" או הערכה - לא תמיד אפשרי):
מספר הצעדים בכל מחצית מתחלק ב-2 וב-3 וב-10 (כי ההפרש בין הספירות הוא 150). אולי 300? אז יהיו 100 זוגות צעדים, ו-150 שלשות. ההפרש ביניהן הוא $150 - 100 = 50$. זה אינו הפתרון, כי בסיפור ההפרש הוא 150, אבל זה נותן לי כיוון ... ננסה 900. זה מתאים, ואז כל הדרך היא בת 1,800 צעדים.
- 9. קביעת המשתנים:** x - מספר הצעדים בין שני הבתים.
- 10. פתרון מתמטי לבעיה:**
פותרים משוואה בנעלם אחד ממעלה ראשונה. קבוצת האמת של המשוואה היא: $\{x=1,800\}$
- 11. אימות הפתרון:** מספר זוגות הצעדים במחצית (450) גדול ב-150 ממספר השלוש (300).

דוגמה 3

כעבור כמה זמן ייפגשו רוני ורונית? (מקרה שבו התרגום דורש הסקת מסקנות מהנתונים).
 רוני ורונית יצאו מבתיהם, במטרה להיפגש. רוני יצא 5 דקות אחרי רונית.
 ידוע שרוני עובר את הדרך מביתו לביתה של רונית ב-10 דקות.
 ידוע שרונית עוברת את הדרך מביתה לביתו של רוני ב-15 דקות.
 כעבור כמה זמן ייפגשו?

קחו בבקשה מארגן חשיבה גרפי ריק, ובכל שלב ושלב מלאו בו את הסעיפים המתאימים.

- 1-7. מיפוי הבעיה וניסוח מחדש:** מדובר בבעיית דרכים. שני אנשים הולכים זה לקראת זה. כלומר, סכום הדרכים שהם עוברים הוא המרחק בין בתיהם. ניעזר בתרשים.
- דרכים:** המרחק לא נתון ביחידות מידה מקובלות. כנראה שנצטרך להתייחס לדרך כולה כאל יחידת המרחק.
- זמנים:** רוני יצא לדרך 5 דקות אחרי רונית, כלומר עד הפגישה הלך רוני 5 דקות פחות מרונית.
- מהירות:** רוני מהיר יותר מגיא. הוא עובר את הדרך כולה ב-10 דקות, בעוד רונית עוברת את הדרך כולה ב-15 דקות. המהירות היא נתון סמוי. בעזרת הבנת מושג המהירות "מתרגמים" את הפסוק המילולי "רוני עובר את הדרך ... ב-10 דקות" לביטוי המתמטי "המהירות של רוני $1/10$ דרך בדקה", וכך גם ניתן להסיק שמהירותה של רונית $1/15$ דרך לדקה.



- 8. ניסיון ל"ניחוש מושכל" או אומדן הפתרון:**

אחשבה: באבט ראשון לא נראה שיש דרך לניחוש. אנסה לאאוד את הצאן. רון עובר לבדו את המרחק ב-10 דקות. אכאן שהם "פגשו אחרי" פחות מ-10 דקות.

"תרגום" משפה מילולית לשפת האלגברה

- 9.** לקבוע משתנה (או משתנים, אם אי-אפשר להסתפק במשתנה אחד) עבור גודל (או גדלים) שמעוניינים לדעת. בדרך כלל המשתנה הוא אחד הדברים שעליהם שואלים.

אחשבה: בדרך כלל אסאנים ב- x את הגודל ששואלים עליו. באקרה זה אנו שואבים לאצוא את הצאן שסבר אאז שרונית יצאה לדרך. אעשה זאת. זהו ניסיון. ייתכן שיהיה קל יותר לפתור אם אבחר את x אחרת. נראה.

ניסוח: x - הזמן של רונית בדקות.

9א. להשתמש במשתנים כדי לבנות תבניות מספר עבור גדלים אחרים התלויים בהם.

הזמן של רוני בדקות - $x-5$

בעזרת נוסחת הקשר בין מהירות, זמן ודרך $s=vt$ רושמים ביטויים מתמטיים עבור הדרכים שעברו.

הדרך שעברה רונית (נמדדת ביחידת הדרך) - $1/15 \cdot x$

הדרך שעבר רוני (נמדדת ביחידת הדרך) - $1/10 \cdot (x-5)$

9ב. בעזרת הקשר שניסחנו בין המשתנים ובאמצעות תבניות המספר והנתונים יש לבנות משוואה או משוואות, המתארות את התנאים שב"סיפור".

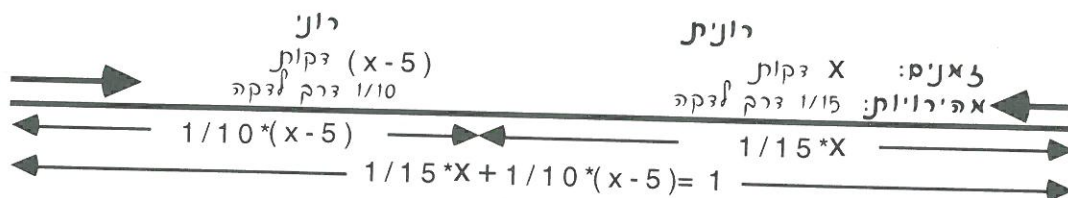
מחשבה: אתה "היסטור" אבינן ש"סכום הדרכים ששברו השניים היא הדרך בין התיקס". פסוק זה "אתרעאים" לאשאלה האתאיאה.

המשוואה המתאימה: $1/15 \cdot x + 1/10 \cdot (x-5) = 1$

ניתן לבטא את מה שעשינו עד כה בטבלת תרגום כמו הטבלות שלהלן, ו/או בתרשים. כל אחד בוחר בצורת ההצגה הנוחה לו.

עברית	מתמטיקה
הזמן מרגע שגיא יצא לדרך (הזמן של גיא)	x
זמן התנועה של רוני	$x-5$
המהירות של רוני	$1/10$ דרך בדקה
המהירות של רונית	$1/15$ דרך בדקה
הדרך שעברה רונית	$1/15 \cdot x$
הדרך שעבר רוני	$1/10 \cdot (x-5)$
(תנאי) הם עברו יחד את כל הדרך	$1/15 \cdot x + 1/10 \cdot (x-5) = 1$

מהירות (v)	זמן (t)	דרך (s)
גיא	x	$1/15 \cdot x$
רוני	$x-5$	$1/10 \cdot (x-5)$
ס"ה		$1/15 \cdot x + 1/10 \cdot (x-5) = 1$



10. לבדוק האם מספר המשוואות שווה למספר המשתנים.

מספר המשוואות שווה למספר המשתנים (1).

10א. לנסות לפתור את המשוואות ולמצוא את קבוצת האמת של המשוואה בדרך אלגברית.

פתרים משוואה בנעלם אחד ממעלה ראשונה.

קבוצת האמת של המשוואה היא $\{x=9\}$

פירוש ואימות הפתרון:

10ב. לנסח את הפתרון המלא במלים.

המשמעות המילולית של קבוצת האמת: הם ייפגשו 9 דקות אחרי שרונית יצאה לדרך ו-4 דקות אחרי שרוני יצא.

11. לאמת האם הפתרון עונה על כל נתוני הבעיה – על-פי ה"סיפור" ולא על-פי הביטוי המתמטי שנתתם לו (האם הפתרון שהתקבל לוקח בחשבון את כל הנתונים והאם הוא סביר).

רונית עברה ב-9 דקות $9/15$ מהדרך (כלומר $3/5$) מהדרך. רוני עבר ב-4 דקות $4/10$ מהדרך (כלומר $2/5$ מהדרך).

$3/5$ מהדרך + $2/5$ מהדרך = הדרך כולה. (כי $2/5 + 3/5 = 1$).
הפתרון עונה על פרטי ה"סיפור".

מודעות לתהליך החשיבה:

12. לבצע חשיבה על החשיבה והסקת מסקנות.

אחשוב: בעצם זוהי בעיית דרכים פשוטה למדי.

הבעיות דרכים אשתאשים, הדרכ-כלל, הנסחה האקשרת זמן, אפירות ודרכ.
יש בבעיה שני קשיים:

1. הדרכ אינה נתונה בק"א או באטרים.

2. שני ההולכים לא יצאו לדרכ יחד.

לנסות: כל צורת הצגה נוספת של הנתונים והקשרים ביניהם תוראת להבנה.

חברי במר לסמן ב-X את הזמן של וני. האם זה קל יותר?

סיכום – מה למדנו בפרק זה?

סכמו בכיתה מהם הדברים החשובים שלמדנו בפרק זה.