

פרק 9: שיטות להצגת הנתונים

כלי החשיבה שנעסוק בו בפרק זה הוא שיטות להצגת הנתונים והבעיה המילולית. פרק זה מהווה השלמה והרחבה לפרק 6 (מיפוי הבעיה).



1. להכיר שיטות שונות להצגת הנתונים והבעיה המילולית. קיימות ארבע שיטות עיקריות להצגת בעיה מילולית באופן שיטתי:

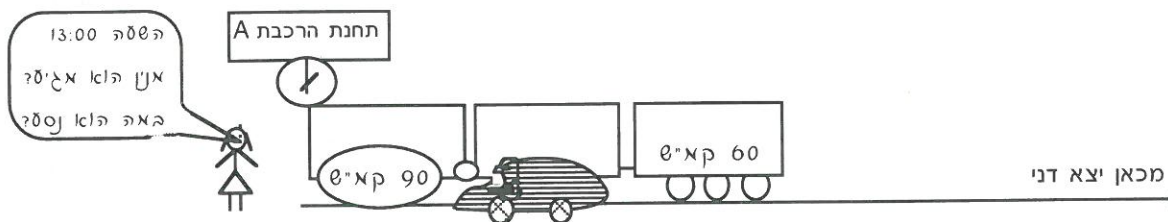
- א. רשימה
- ב. טבלה
- ג. תרשים
- ד. גרף.

2. ללמוד להתאים שיטת הצגת נתונים מתאימה לבעיה. בפרקים קודמים נאמר שהשיטות השונות להצגת הנתונים תלויות בהעדפה אישית. למשל, בבעיות דרכים, יש המעדיפים תרשים על פני טבלה, יש המציגים את הבעיה הן בעזרת תרשים והן בעזרת טבלה, ויש המעדיפים תיאור גרפי או רשימת נתונים. כמו-כן נאמר כי רצוי להציג את הנתונים בדרכים רבות ככל האפשר. אולם נראה כי לעתים צורת הצגה מסוימת מסייעת למיפוי הבעיה יותר ממצורות אחרות.

עבודה על דוגמאות בתיווך המורה

דוגמה 1

דני נדבר עם דנה שייפגשו בשעה 13:00 בתחנת הרכבת של העיר A. אם דני ייצא עכשיו לדרך ברכבת, הנוסעת במהירות ממוצעת של 60 קמ"ש, יגיע לפגישה בדיוק ב-13:00. אם ייסע עם חברו במכוניתו החדשה, הנוסעת במהירות ממוצעת של 90 קמ"ש, בכביש מקביל למסילת הרכבת, יוכל דני לצאת לדרך בעוד שעה. מה המרחק בין המקום בו נמצא דני ובין מקום הפגישה? האם נוכל לומר דברים נוספים?



בדוגמה הראשונה ניתן להציג את הנתונים בכל ארבע השיטות. כמו כן ניתן לבחור את המשתנה בדרכים שונות, ובהתאם לכך לקבל משוואות שונות ופתרונות שונים למשוואות. ניתן לחלק את הכיתה לקבוצות ולבקש מכל קבוצה לפתור בשיטה אחרת ו/או תוך בחירת המשתנה בדרך שונה. זוהי הזדמנות מצוינת להשוות בין השיטות, לעמוד על היתרונות והחסרונות של השיטה במקרה זה ובכלל, כל זאת בלי לוותר על החופש לבחור בסופו של דבר בשיטה אחת או בשיטות אחדות להצגת נתונים על-פי ההעדפה האישית.

בדוגמאות הבאות נראה שלא תמיד ניתן להציג את הנתונים בכל השיטות שצוינו.

לפני שאתם מציגים את הנתונים, הזכירו לתלמידים לקרוא פעמיים (עם עיפרון ביד), למפות את הבעיה תוך שימוש במארגן חשיבה גרפי (רצוי בעזרת ציור), להתייחס למטרת הבעיה, לנתונים הגלויים, לנקודה שבה טמון הקושי, ולקצה חוט אפשרי שעשוי להוביל לפתרון. להלן סיכום שלבים אלה.

מיפוי הבעיה.

סוג הבעיה: בעיית דרכים.

מדובר על שני כלי-רכב שעוברים דרך מסוימת במהירויות שונות (אמשה): כאשר אהירותן של כלי הרכב גדולה יותר, הצאן הצדוש לסבור את אותה הדרך יהיה קצר יותר, ולפיכך.

נתונות המהירויות. ידוע גם ההפרש בין זמני הנסיעה שלהם.

המטרה היא למצוא את אורך הדרך.

היכן טמון הקושי? גם אורך הדרך וגם זמני הנסיעה לא ידועים.

קצה חוט: מההפרש בין זמני הנסיעה ניתן בוודאי ללמוד על אורך הדרך. כי ככל שהדרך ארוכה יותר, כן ההפרש בין זמני הנסיעה הולך וגדל.

שיטה א: רשימת נתונים

נתונים גלויים:

המהירות ברכבת – 60 קמ"ש.

המהירות במכונית – 90 קמ"ש.

הנסיעה ברכבת נמשכת שעה אחת יותר מאשר הנסיעה במכונית.

נתונים סמויים:

נקבע את המשתנה בשלוש דרכים שונות, ובהתאם לכך נבטא את הגדלים האחרים ואת המשוואה המתאימה.

1. קביעת המשתנה: x ק"מ – אורך הדרך מנקודת המוצא של דני עד תחנת הרכבת.

זמן הנסיעה ברכבת הוא $x/60$ שעות.

זמן הנסיעה במכונית הוא $x/90$ שעות.

2. קביעת המשתנה: x שעות – זמן הנסיעה ברכבת.

זמן הנסיעה במכונית הוא $x-1$ שעות.

הדרך (ברכבת) היא $60x$ ק"מ.

הדרך (במכונית) היא $90(x-1)$ ק"מ.

3. קביעת המשתנה: x שעות – זמן הנסיעה במכונית.

זמן הנסיעה ברכבת הוא $x+1$ שעות.

הדרך (ברכבת) היא $60(x+1)$ ק"מ.

הדרך (במכונית) היא $90x$ ק"מ.

בניית משוואות ופתרון:

1. המשוואה היא "תרגום" המשפט המילולי: "זמן הנסיעה ברכבת גדול בשעה מזמן הנסיעה במכונית".

$$x/60 = x/90 + 1$$

קבוצת האמת של המשוואה:

$$\{x=180\}$$

ניסוח במלים ופירוש:

המרחק שעבר דני הוא 180 ק"מ.

ברכבת דרך זו נמשכת 3 שעות, כי $180/60 = 3$.

במכונית דרך זו נמשכת 2 שעות, כי $180/90 = 2$.

ההפרש בין זמני הנסיעה הוא אכן שעה אחת.

אימות הפתרון על-פי הסיפור:

2. רישמו את המשפט המילולי שאותו "תתרגמו" למשוואה. בנו אותה, פתרו, פרשו ואמתו.

3. רישמו את המשפט המילולי שאותו "תתרגמו" למשוואה. בנו אותה, פתרו, פרשו ואמתו.

כאן כדאי לשוב ולשוחח על קביעת המשתנה, מה נוח יותר, מה ברור יותר וכדומה (ראו פרק 8).

שאלות:

מדוע מקבלים ערכים שונים ל- x ?

איזה מה- x ים שקבעתם הוא פתרון לבעיה כפי שהועמדה?

איזו קביעה של x נראית לכם ביותר?

האם הקביעה שלפיה x הוא היעד של הפתרון היא דווקא הנוחה והקלה ביותר?

"שאלות אלו לא צריכות להיות שאלות סגורות"

שיטה ב: טבלה

באיזה תפקיד משמש x בטבלה הבאה?

לאיזו משלוש הדרכים לבחירת המשתנה שהוצגו מתאימה הטבלה הבאה?

v (מהירות)	t (זמן) בשעות	s (דרך) בק"מ
90 קמ"ש	x	$60x$
60 קמ"ש	$x-1$	$90(x-1)$

באיזה טור תשתמשו כדי לבנות את המשוואה? מה משמעותה של המשוואה?

מלאו טבלות דומות לטבלה הקודמת עבור שאר הדרכים לקביעת x .

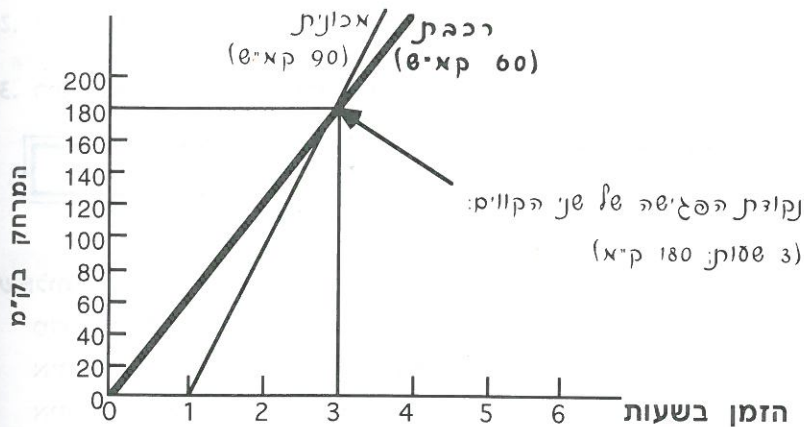
שיטה ג: תרשים

השלימו את התרשים כך שיציג את נתוני הבעיה במלואם. קיבעו לאיזו מן הדרכים לקביעת המשתנה שאותן הפעלנו לעיל מתאים התרשים.



שרטטו תרשימים מתאימים לכל אחת משתי הדרכים האחרות לקביעת המשתנה.

שיטה ד: גרף



זה המקום לדון ביתרונותיה ובחסרונותיה של כל אחת מהשיטות להצגת הנתונים.

היתרון הגדול בהצגת הבעיה בעזרת גרף הוא שאפשר לקבל תמונה דינמית של המצב (במקרה זה, תנועות הרכבת והמכונית) בכל רגע ורגע במהלך התנועה (בגרף של תנועת הרכבת והמכונית מתוארות, למעשה, המהירויות הממוצעות של התנועה), ואילו כאשר פותרים משוואות מתייחסים לרגע מסוים (למשל, סוף הדרך). יתרון נוסף הוא שמקבלים פתרון מיידי. מהן חסרונותיה של ההצגה באמצעות גרף?

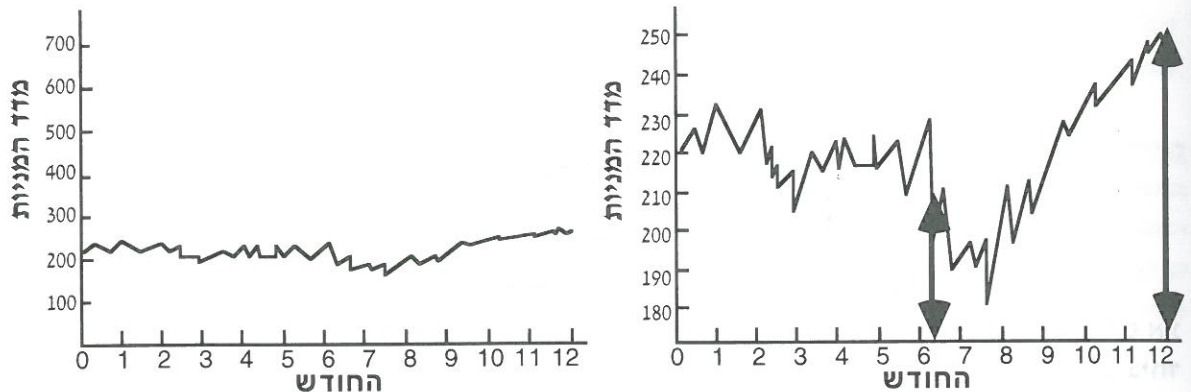
שאלות:

איזו הצגת נתונים נראית לכם ביותר?
נתחו את האופייני לכל שיטת הצגת נתונים ואת ההבדלים ביניהן.

כיוול מערכת הצירים

כאשר משרטטים גרף חשוב מאוד כיצד בוחרים את **כיוול** מערכת הצירים (היחידות על מערכת הצירים), ומתאימים אותו לבעיה.

לפניכם שני גרפים המתארים את שינוי מדד המניות בבורסה במשך שנה מסוימת. האם שני הגרפים מספקים אותו מידע (אינפורמציה)? נסחו את ההבדלים ביניהם. אילו מסקנות ניתן להסיק מכל אחד מהם?



הגרף הוא אחד הכלים שבהם אנו משתמשים כדי לפתור בעיות וכדי לייצג היבט מסוים של המציאות בדרך חזותית. משבצים נתונים לגרף ומצפים "לראות" תמונה של המציאות. בגרף השמאלי ניתן להתרשם באופן כללי מהתנהגות מדד המניות. לומדים שהשינויים לא היו גדולים מאד, ובסך-הכול, במשך השנה כולה, המדד עלה. אם רוצים להיכנס לפרטים, כלומר, לראות שינויים קטנים, יש "להגדיל" את הגרף, ולהשתמש בקנה מידה מתאים לתיאור היחידות. כאשר מסתכלים בגרף, יש לשים לב היטב לערכים המספריים הרשומים על מערכות הצירים (הכיוול), ולא – עלולים לטעות ולהתרשם מההתבוננות בגרף הימני שמדד המניות בסוף השנה היה יותר מכפליים המדד באמצעיתה (ראו גודל החצים בשרטוט). במציאות היה המדד באמצע השנה 210 ובסופה 250. הסיבה לכך היא שהציר האנכי מתאר השתנות בין 170 ל-250 ולא בין 0 ל-250.

בשני הגרפים מדובר בייצוג מדד המניות. שני הגרפים אמנם מתארים אותו מידע, אך הם מדגישים היבטים שונים שלו.

בגרף השמאלי ניתן להתרשם מהמגמה הכללית של עליית המדד. במשך השנה נרשמה עלייה של המדד, עם תנודות קלות למעלה ולמטה.

בגרף הימני, הציר האנכי מכיל בדרך שונה: הוא משקף את התחום שבין מדד 170 ובין 250. הגרף הימני הוא הגדלה של הגרף השמאלי. ניתן ללמוד ממנו שמדד המניות נע במשך השנה בין 180 ל-250. השפל היה בחודש יולי. השיא היה בחודש דצמבר. אם לא מתייחסים לכיוול, אפשר לטעות ולחשוב שהמדד בסוף השנה היה כמעט כפול מזה שבתחילתה, וכמעט פי שמונה ממדד חודש אוגוסט.

דוגמה 2

בדוגמה זו לא ניתן להציג את הנתונים בכל ארבע השיטות. התרשים אמנם אפשרי, אבל הוא מסורבל.

ליוני 3 חתולים:

פושקין צורך שקית חתלי ב-12 ימים.

נינה צורכת פי שניים מהכמות שצורך סמי.

סמי צורך $\frac{1}{3}$ הכמות שצורך פושקין.

מדי כמה ימים צריך יוני לקנות שקית חתלי?

נסו לפתור את הבעיה בכל אחת מן השיטות שהכרנו בתחילת הפרק.

מיפוי הבעיה.

סוג הבעיה: זוהי בעיית הספק (מסוג בעיות הדרכים).

בעיות הספק דומות לבעיות דרכים כי אם כופלים את ההספק (הצריכה ליום) של כל חתול בזמן, מקבלים את הכמות שצריך כל חתול במשך אותו הזמן. אפשר גם לראות זאת כאילו ההספק של שלושת החתולים **ביחד** הוא סכום ההספקים שלהם.

מדובר על **לצורך יחד** כמות מסוימת (שקית חתלי).

נתונה רק כמות הצריכה של פושקין. כמות הצריכה של שני החתולים האחרים מבוטאת באמצעות כמות הצריכה של פושקין.

המטרה היא למצוא בכמה ימים מחסלים שלושת החתולים שקית אחת.

היכן טמון הקושי?

(א) בבעיות דרכים חייבות המהירויות של כל הנוסעים להיות מבוטאות באותה יחידת מידה. איך לבטא את כמות הצריכה של כל החתולים בעזרת אותה יחידת מידה?

(ב) איך לקשר בין כמות הצריכה של כל חתול לבין מספר הימים המבוקש?

קצה חוט: (א) אנסה לבטא את כמות הצריכה של כל חתול באמצעות יחידת המידה "שקית ליום" כלומר, כמות הצריכה של החתול תבוטא באמצעות החלק של שקית שהחתול אוכל ביום אחד.

(ב) זה מזכיר בעיות אחרות שכבר פתרנו על קבוצת פועלים שמבצעת **ביחד** עבודה מסוימת או על צינורות שממלאים **ביחד** בריכה. בבעיות אלה ביטאנו את הכמויות (עבודה, בריכה וכו') כחלק מן השלם, ואמרנו שסכום הכמויות הוא 1 (השלם).

שיטה א: רשימת נתונים

נתונים גלויים:

פושקין - שקית ב-12 ימים

נינה - פי שניים מאשר סמי.

סמי - שליש מפושקין.

שיאו לב לשני סדר הצגת
הנתונים ולטואר הפיפור. אזוסי



פושקין - שקית ב-12 ימים
סמי - שליש מפושקין
נינה - פי שניים מאשר סמי

נתונים סמויים:

פושקין – שקית ב-12 ימים, כלומר $1/12$ שקית ליום.
 סמי – שליש מפושקין, כלומר, שליש שקית ב-12 ימים, שקית ב-36 יום, $1/36$ שקית ביום.
 נינה – פי שניים מסמי, כלומר, שליש שקית ב-6 ימים, שקית ב-18 ימים, $1/18$ שקית ביום.

קביעת המשתנה: x – מספר הימים לצריכת שקית אחת.

פושקין אוכל ב- x ימים – $x/12$ שקית.

נינה אוכלת ב- x ימים – $x/18$ שקית.

סמי אוכל ב- x ימים – $x/36$ שקית.

בניית משוואה ופתרון:

המשוואה היא "תרגום" המשפט המילולי: "ב- x ימים הם צורכים שקית אחת".

$$x(1/12 + 1/18 + 1/36) = 1 \quad \text{או} \quad x/12 + x/18 + x/36 = 1$$

המשוואה:

$$\{x=6\}$$

קבוצת האמת של המשוואה:

ניסוח במלים ופירוש:

מדי 6 ימים מחסלים שלושת החתולים שקית חתלי.

פושקין צורך ב-6 ימים חצי שקית חתלי, כי $6/12 = 1/2$.

סמי צורך שליש מפושקין, כלומר הוא צורך ב-6 ימים

שישית שקית חתלי, כי $(1/2) \cdot (1/3) = 1/6$.

נינה צורכת פי שניים מסמי, כלומר היא צורכת ב-6 ימים

שליש שקית חתלי, כי $(1/6) \cdot 2 = 1/3$.

אם נחבר את הכמויות שצורכים החתולים במשך 6 ימים

נקבל 1, כלומר, הם צורכים שקית אחת.

אימות הפתרון על-פי הסיפור:

שיטה ב: טבלה

פושקין	צריכה	מספר הימים	כמות ליום	כמות ב- x ימים
1 חתלי	12	$1/10$	$x/12$	
סמי	$1/3$ חתלי	12	$1/36$	$x/36$
נינה	$2 \cdot (1/3)$ חתלי	12	$1/18 = 2/36$	$x/18$

שיטה ג: תרשים.

לא מתאים. לא לכל בעיה ניתן להתאים תרשים.

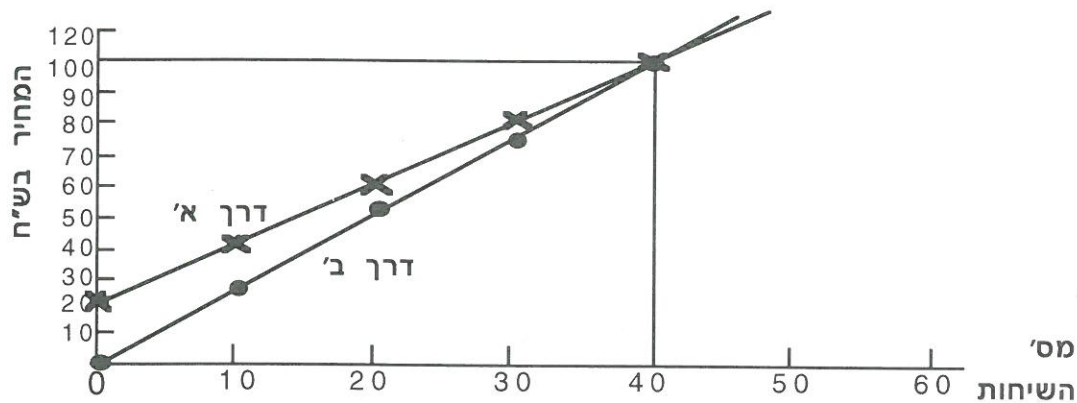
שיטה ד: גרף.

לא מתאים.

דוגמה 3

בדוגמה זו בולט היתרון שבהצגת הנתונים בעזרת גרף. כדאי לדון בשאלה לגבי איזה סוג בעיות זה קורה.

חברת הטלפונים מציעה שתי דרכים לחישוב חשבון הטלפון.
 דרך א': תשלום חודשי קבוע של 20 ש"ח, ותשלום של 2 ש"ח עבור שיחה טלפון בודדת.
 דרך ב': תשלום של 2.5 ש"ח עבור שיחה בודדת, ללא תשלום קבוע.
 הציגו את הנתונים בשתי דרכים שונות וקבעו את מספר השיחות שמצדיק את הבחירה בכל אחת מן השיטות.



סוג הבעיה: כללי
 הגרף מראה בצורה ברורה כי מי שמשוחח יותר מ-40 שיחות, מוטב לו שיבחר בדרך א'.
 מי שמשוחח פחות מ-40 שיחות, מוטב לו שיבחר בדרך ב'.

דוגמה 4

ריבוי שפות

באחד מאזוריה של קנדה, 70% מהאוכלוסייה הם דוברי אנגלית ו-50% מהאוכלוסייה הם דוברי צרפתית.
 איזה אחוז מהאוכלוסייה הם דוברי שתי השפות?

בדוגמה זו, מתורת הקבוצות, ניעזר בתרשים. לפני שפותרים, יש לדון במכלול האפשרויות ליחסים הדדיים בין דוברי האנגלית ודוברי הצרפתית. להמחשת הדברים מומלץ שהמורה ישתמש בדוגמה דומה לגבי תלמידי הכיתה. בהתאם לכיתה המסוימת – למשל, תלמידים שמשתתפים בחוגים או עוסקים בסוגי ספורט שונים.

מיפוי הבעיה.

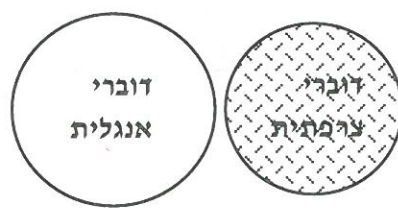
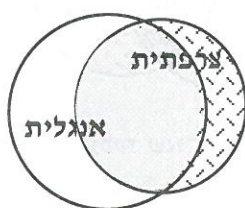
זוהי בעיה של תורת הקבוצות. **קבוצה** היא אוסף של איברים, או פריטים, או יחידים בעלי תכונה משותפת. למשל, בדוגמה הנ"ל: A היא הקבוצה שאיבריה הם כל דוברי האנגלית (התכונה המשותפת: דוברי אנגלית); B היא הקבוצה שאיבריה הם כל דוברי הצרפתית (התכונה המשותפת: דוברי צרפתית). אילו מצבים הדדים יכולים להיות בין שתי הקבוצות? ברור שישנם דוברי אנגלית שאינם דוברי צרפתית. הם ישתייכו לקבוצה B אולם לא לקבוצה A. האם ייתכן שאין כל חפיפה בין הקבוצות? האם תיתכן חפיפה חלקית או מלאה בין הקבוצות?

כאשר אף איבר בקבוצה A לא יכול להיות איבר בקבוצה B, אנו אומרים ש"קבוצות A ו-B הן זרות זו לזו (החיתוך שלהן הוא הקבוצה הריקה)".

כאשר כל איבר בקבוצה A הוא גם איבר בקבוצה B, אנו אומרים ש"קבוצה A מוכלת בקבוצה B".

כאשר כמה מהאיברים בקבוצה A הם גם איברים בקבוצה B, אנו אומרים ש"קיימת חפיפה חלקית בין קבוצה A לקבוצה B".

המחשה גרפית (דיאגרמות ון): זוהי שיטה לפתרון בעיות מעין אלה, שבה כל קבוצה מיוצגת על-ידי מעגל. העיגול מייצג את איברי הקבוצה. (קבוצה יכולה להיות מיוצגת על-ידי צורות גיאומטריות שונות, כמו אליפסה או מלבן, אולם אנו בוחרים לשם פשטות לייצג קבוצות על-ידי מעגלים).

שלושה מצבים הדדיים אפשריים בין שתי קבוצות

שתי הקבוצות זרות זו לזו אחת הקבוצות מכילה את האחרת יש חפיפה חלקית בין הקבוצות

דוברי אנגלית ☐

דוברי צרפתית ☐

דוברי אנגלית וצרפתית גם יחד ☐

בבעיה העומדת לפנינו, ברור כי יש לשתי הקבוצות איברים משותפים כי אילו היו הקבוצות זרות זו לזו היה סך כל דוברי האנגלית ודוברי הצרפתית 120% מאוכלוסיית האזור, מה שאינו אפשרי.

הפתרון אינו חד-ערכי: הוא נע בין מצב של חפיפה חלקית של 20% (מדוע?) בין הקבוצות, לבין מצב שבו הקבוצה הגדולה מכילה את הקבוצה הקטנה – כלומר 50% מהאוכלוסייה הם דוברי צרפתית ואנגלית ו-20% הם דוברי אנגלית שאינם דוברי צרפתית.

מה היה קורה אילו היו 40% דוברי צרפתית? ואילו היו 30% דוברי צרפתית? ואילו היו 20% דוברי צרפתית? האם תוכלו לנסח כללי?

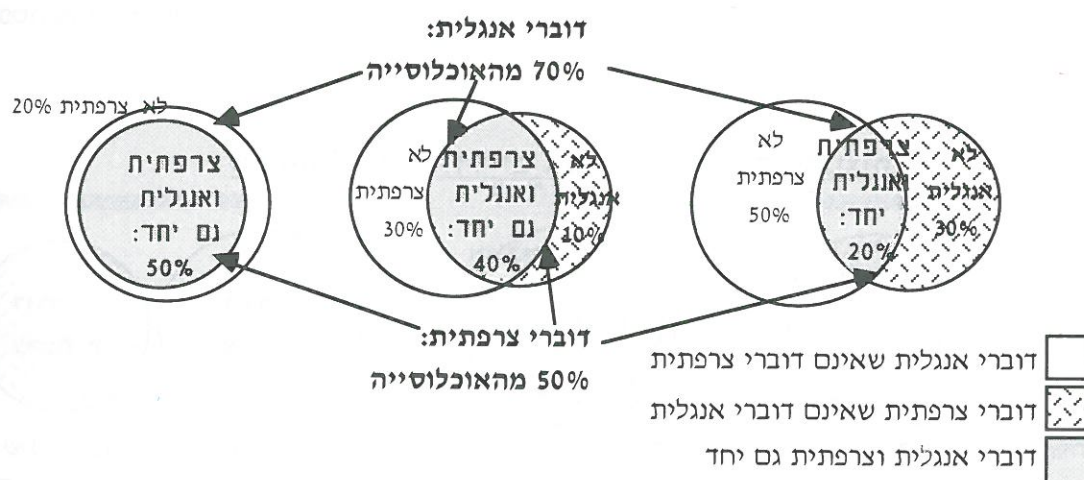
האם יש מקרים של תושבים שאינם דוברים אף אחת משתי השפות?

כאשר יש חפיפה חלקית של 20%, דוברי האנגלית ו/או הצרפתית מהווים 100% מהאוכלוסייה. דוברי אנגלית בלבד מהווים 50% מהאוכלוסייה; דוברי צרפתית בלבד מהווים 30% מהאוכלוסייה; אין תושבים שאינם דוברים לפחות אחת משתי השפות.

כאשר יש חפיפה חלקית של 40%, דוברי האנגלית ו/או הצרפתית מהווים 80% מהאוכלוסייה. מדוע? במקרה כזה יש תושבים שאינם דוברים אף אחת משתי השפות. הם מהווים 20% מהאוכלוסייה.

כאשר דוברי הצרפתית מוכלים בדוברי האנגלית, נשארים 30% מהאוכלוסייה (אלה הנמצאים מחוץ למעגל דוברי האנגלית) שאינם דוברים אף אחת משתי השפות.

אפשרויות לחפיפה



סיכום – מה למדנו בפרק זה?

סכמו בכיתה מהם הדברים החשובים שלמדנו בפרק זה.