



כלי חשיבה בסיסיים לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה

מדריך למורה
מהדורה ניסויית



מכון ברנקו וייס
לטיפוח החשיבה

מטה
מחר
98



משרד החינוך, תרבות והספורט
המנהל הפדגוגי
האגף לתכניות לימודים

כלי חשיבה בסיסיים לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה

מדריך למורה

מהדורה ניסויית



מכון ברנקו וייס
לטיפוח החשיבה

מטה
מחר
98



משרד החינוך, התרבות והספורט
המנהל הפדגוגי
האגף לתכניות לימודים

כלי חשיבה בסיסיים לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה

מחקר וכתיבה:	דליה שרון
ייעוץ:	מיכל עורב, דר' רינה הרשקוביץ, נירה אוסטשינסקי
ריכוז:	רחלי יופה
הערכה מקדימה:	דר' תלמה מילדנר
עריכה לשונית:	אמיר צוקרמן
עיצוב העטיפה:	מינימול
מנהלה:	אסתר קנלר
לוחות והדפסה:	דפוס מאור ולך

המבנית **כלי חשיבה בסיסיים לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה** נועדה לסייע למורים לקדם נושא זה בכיתה. הבעייתיות של תהליך פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה היא בעובדה שהוא מתרחש בין שתי איכויות שונות של חשיבה: החשיבה המילולית והחשיבה המספרית. על התלמידים לפתח לעצמם יכולות כגון יכולת "הבנת הנקרא" של טקסט מילולי-כמותי ויכולת האינטרפרטציה של טקסט זה לשפת המתמטיקה לשם בניית התהליך הלוגי-כמותי הקשור בפתרון הבעיה; לשם כך יש צורך להשתמש בכלי חשיבה ובכך מטפלת מבנית זו.

המבנית נועדה לשמש בהוראת המתמטיקה בכיתות ז' עד ט' והיא פרי עבודת **מכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה** בנושאים אלה בשנים האחרונות.

מכון ברנקו וייס מודה למנכ"ל משרד החינוך, התרבות והספורט, מר בנציון דל, למשנה למנכ"ל משרד החינוך, התרבות והספורט, גב' שלומית עמיחי, למנהל האגף לתכניות לימודים, מר משה אילן, ולצוות מח"ר 98 בראשות גב' גילה גור, על עזרתם ועידודם לעבודת המכון ולכתיבת מבנית זו. תודה מיוחדת לד"ר ברנקו וייס, יו"ר מכון ברנקו וייס, על תמיכתו המתמדת, עידודו ופועלו הרב בתחום טיפוח החשיבה.

ירושלים, יוני 1997, סיוון תשנ"ז.

© 1997 כל הזכויות שמורות למכון ברנקו וייס לטיפול החשיבה.

אין לתרגם, או לשכתב, אם בחלקו או במלואו, אין לשמור או לשכפל בכל דרך שהיא - באמצעות צילום, שכפול הדפסה, או בכל דרך אחרת, מבלי לקבל רשות מוקדמת בכתב מבעלי הזכויות.

תוכן העניינים

עמ'

1	מבוא
7	פרק 1: היבטים כמותיים והיבטים לא כמותיים (איכותיים) של "עולם הבעיה"
19	פרק 2: התמצאות בסוגי יחידות מידה ושימוש מושכל ביחידות
53	פרק 3: לאלגברה ולחשבון – אותו ההיגיון
75	פרק 4: דרוש/ה מתורגמן/ית מעברית לאלגברה
93	פרק 5: הסקת מסקנות מיידיות
101	פרק 6: מיפוי הבעיה – ניסוח מחדש וזיהוי המטרה והנתונים (סמויים וגלויים)
121	פרק 7: השערת פתרון – ניחוש מושכל, אומדן, בחירת הפתרון מבין תשובות אפשריות מוצעות
135	פרק 8: פתרון אלגברי של הבעיה, פירוש ואימות הפתרון
161	פרק 9: שיטות להצגת הנתונים
183	פרק 10: בחינת הנתונים
193	פרק 11: פירוק לשלבים של תהליך פתרון הבעיות
211	פרק 12: המצאת בעיות מילוליות

מבוא

מדוע כדאי לעסוק בבעיות מילוליות במתמטיקה?

- **כדי לצייד את התלמידים בכלים ובשיטות כלליות לפתרון בעיות לא מוכרות, לאו דווקא במתמטיקה.** למשל, רצוי שהפותר ירגיל את עצמו: לא לנסות ולפתור בעיה לפני שזיהה את כל רבדיה, הכיר על בוריו את "עולם הבעיה" (ראו להלן) והגדיר אותה; להפריד בעיה לחלקים; למצוא אנלוגיות לבעיה שלפניו; לחפש דרכים להצגת הבעיה ולפתרונה; לבחון את הפתרון שהציע וכו'.
- **כדי לפתח "הבנת הנקרא" במתמטיקה ולקרב למתמטיקה תלמידים שיש להם רתיעה מנוסחאות.** מדובר הן בפיתוח הבנה יסודית של תוכן ומשמעות הבעיות – בהקשר הנכון – כאשר הן מנוסחות בשפה העברית והן בהבנה מעמיקה של תוכן ומשמעות הביטויים והמשפטים של השפה המתמטית.
- **כדי לפתח את החשיבה התבניתית של הלומד.** החשיבה התבניתית תתפתח בדרך של "תרגום" של סיפור לתבנית בשפה אחרת, "תרגום" של ניסוי מדעי לנוסחה, "תרגום" של ניסוי לדוח מעבדה וכדומה. התמודדות עם בעיה מילולית תורמת לפיתוח חשיבה מסודרת ומכינה את הפותר לחשיבה תבניתית גם בתחומי לימוד אחרים.
- **כדי לפתח דרך עבודה שיטתית, יעילה ו"נכונה",** כלומר, לדעת להתאים לכל מצב את החוקים והחוקיות המתאימים לו, את הכלי המתאים לו – כמו, למשל, לדעת לבחור את יחידת המידה לפי הצורך (איך לשקול פיל ואיך לשקול נמלה).
- **כדי לקרב את המתמטיקה לחיי התלמיד ולעזור לו להתגבר על בעיות יומיומיות – בבית, בעבודה, ברחוב, ובמקצועות אחרים בבית-הספר.** לדוגמה: יש לצפות שולחן מלבני ישן; לדעת כמה דלק למלא במיכל כך שישפיק לחימום הבית במשך כל חודשי החורף; להשתמש בנתונים סטטיסטיים על אוכלוסי מדינות; להעריך כמה זמן דרוש לביצוע משהו, וכיוצא באלה.
- **כדי לחזק ולפתח יכולות חשיבה מופשטת ולסייע במעבר מחשיבה מוחשית לחשיבה מופשטת-מוכללת.**

מובן מאליהם שיכולות אלה נחוצות לכל מי שימשיך בלימודים אקדמיים.



מהן מטרותיה של מבנית זו?

- לסייע למורה בכיתה הטרוגנית לפתח ולהקנות לתלמידים הרגלים וכלי חשיבה אשר יאפשרו להם לפתור בעצמם בעיה חדשה.
- להציג בפני המורים והתלמידים קשת רחבה של אסטרטגיות הוראה שתביא בחשבון, מלבד ההטרוגניות

של היכולות במתמטיקה, את העובדה שלילדים שונים יש נטיות חשיבה שונות¹ ולכן ייתכן שאסטרטגיית הוראה המצליחה עם קבוצה אחת תיכשל עם קבוצה אחרת. למשל, לתלמיד בעל חשיבתה חזותית (בתמונות) טובה – חשוב להמחיש דברים בתמונות ובדימויים; אולם אסטרטגיה זו עשויה להיכשל כשמפעילים אותה על ילד שחושב במלים ובסימנים.

• לספק לתלמיד אתגר אינטלקטואלי שעצם ההתמודדות עמו תסב לו הנאה.

מהם הרגלי החשיבה וכלי החשיבה שברצוננו להקנות?

• לראות בעיה מילולית במתמטיקה לא כמשהו יבש אלא כחלק מתמונה שלמה ותוססת וממכלול של היבטים – מ"עולם הבעיה" (ראו להלן), ולבנות את "עולם הבעיה" (מבלי לפחד להכניס קצת דמיון), גם מבחינה איכותית וגם מבחינה כמותית.

פתרון בעיה מילולית כרוך בהבנתה. הבנת הבעיה כרוכה בהתמצאות ב"עולם הבעיה", כלומר, בראיית ובהבנת כל הנתונים – הגלויים והסמויים, בהבחנה בין נתונים חשובים לבין כאלה שאינם מעניינים אותנו ובהסקת כל המסקנות שניתן להסיק.

על מנת שניתן יהיה להגיע להכללה ולהפשטה עלינו לבסס את הקונקרטי-הממשי. הבעיה תיטען משמעות אחרי שהפותר יראה את הצבעים, יטעם מן הטעמים ויריח את הריחות – כלומר, יתערה ב"עולם הבעיה" שמעבר למשפטים היבשים "אב גדול מבנו ב..." או פי 5..." "ברכה מתמלאת בכך וכך שעות" או "שתי מכונות נוסעות זו לקראת זו".

לאחר ש"עולם הבעיה" כבר נבנה יש לבנות בהדרגה את המעבר מן הקונקרטי למוכלל ולמופשט.

• להתרגל להעלות תמיד שפע של אפשרויות והשערות.

• לפתח שפת חשיבה: קשה לצפות לחשיבה ללא הבנת המילים, כשם שקשה לצפות שמישהו יבין מהו שבר פשוט מבלי שיבין כי 'מכנה' פירושו 'כינוי'. מלבד השימוש במילים כמו העלאת השערות, מציאת סיבות, חיפוש נתונים, הוכחה, אימות, הספק, גדול (קטן) ב..., פי ..., וכו', כוללת השפה שימוש בתבניות מספר, בתבניות פסוק, בטבלאות, בגרפים, ועוד.

• להגביר את מודעות החושב לתהליכי החשיבה שלו. הגברת המודעות והשליטה על הדרך שבה אנו חושבים (מטה-קוגניציה) מכשירה כלי שישמש את הלומד בהמשך בכל מקום שנדרשת בו חשיבה. השליטה בחשיבה כוללת גם את היכולת למצוא מהו כלי החשיבה שבו ראוי להשתמש ולתרגל שימוש נכון ומבוקר בו.

מחקרים מוכיחים שאחד ההבדלים בין פתרון בעיות של מומחה לבין זה של טירון היא שביצועיו של המומחה כוללים יותר יסודות מטה-קוגניטיביים מאשר אלו של הטירון. מומחים מתכננים בצורה יעילה יותר, מפקחים על ביצועיהם בצורה קפדנית יותר, ויש להם תחושה ברורה הרבה יותר ביחס ליכולותיהם ולמגבלותיהם בפתרון בעיות.

1 ראו אינטליגנציות מרובות מאת הווארד גרדנר, הוצאת מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה, ירושלים 1996

- לדעת לבחור כלי חשיבה מתאים – הן לפתרון הבעיה שעל הפרק והן לנטיית החשיבה של התלמיד.
- לפתח גישה אינטואיטיבית לפתרון בעיות – ניחוש מושכל של פתרון, אומדן של פתרון (פתרון "בערך"), הצעה של פתרון אפשרי ובדיקתו בדרך של "הליכה לאחור", הבחנה בין פתרון הגיוני לבין פתרון לא הגיוני וכו'.
- להבין את ההיגיון העומד בבסיסן של פעולות חשבוניות ואלגבריות.
- לדעת לארגן את נתונים ולחשוב עליהם בדרך הולמת.
- לדעת לפרק בעיה מורכבת לשלבים פשוטים.

מהן הטכניקות שבהן נשתמש?

- על המורה להימנע ככל האפשר מהצגת רעיונות או דרכי פתרון. במקום זאת עליו לספק לתלמידים חומר למחשבה ולמעודד את עבודתם העצמית, וכך – בדרך יחידנית או בקבוצות – לעודד אותם להציע רעיונות רבים, להעלות השערות, לבחון אותן, להגיע למסקנות, להקשיב לדברי חבריהם וכו'.
- המחשה והדמיה, כלומר, לנסות לתרגם את החומר הכתוב או את המחשבות לתמונות או לדימויים. רצוי לעשות זאת בכתב, אבל אפשר גם לעצום עיניים ולראות תמונות או דימויים של מה שנלמד או של רעיון כלשהו. התמונות או הדימויים ישתנו מילד לילד בהתאם לנטייתו. ייתכן שיהיו ילדים שיעדיפו לראות מספרים ונוסחאות בצורה ישירה.
- בדרך כלל, מקובל לכתוב על הלוח, אבל לא מקובל לצייר. אין צורך בכישרון ציור. הציורים הלא-מושלמים של המורה יעודדו את התלמידים שמתביישים ברישומיהם ובציוריהם. אפשר אף לצייר סמלים גרפיים פשוטים. למשל, תוך כדי הצגת בעיה שבה מדובר על אב ובנו מציינים על הלוח  לצד הנתונים. ניתן גם לבקש להמחזי בעיה במתמטיקה (שני ילדים הולכים זה לקראת זה או באותו כיוון, המהירויות יכולות להשתנות, אפשר לעצור בדרך וכו').
- שימוש ב"מארגני חשיבה גרפיים" (ראו, למשל, בפרק 6 – מארגן חשיבה גרפי לאיתור בעיה ופתרונה). "מארגן חשיבה גרפי" הוא טבלה, שעוזרת לחשוב בצורה יותר מסודרת. הוא מארגן בצורה מסודרת ומארגנת את מכלול השאלות והתשובות הבונים את תהליך החשיבה. מחקרים הראו שמארגני חשיבה גרפיים משפרים את החשיבה בצורה מדהימה. הם עוזרים במיוחד ללומדים חזותיים, אבל מביאים תועלת לכל התלמידים. מארגן חשיבה בנוי היטב יתאפיין בכך שיציג יחסים חשובים בין חלקי מידע ובין צעדים בתהליך החשיבה; ינחה את התלמידים לאורך תהליך החשיבה; ויאפשר לרשום בצורה מסודרת מידע שצריך לזכור.
- הדרך הטובה ביותר לבניית מארגן חשיבה יעיל היא לעשות זאת תוך כדי תהליך החשיבה ובעזרת התלמידים. המורה יכול לצייר את מארגן החשיבה על הלוח בעוד התלמידים ממלאים אותו בדפיהם.

עבודה בקבוצות.

עבודה בזוגות:

האחד, ה"פותר" או ה"מדבר", חושב בקול רם ומנסה לפתור את הבעיה. השני, ה"מקשיב" או השומע, מקשיב, רושם, שואל שאלות הבהרה אם אינו מבין משהו או אם הוא מעוניין בפרטים (לדוגמאות ראו להלן עמ' 31, 36, 65).

בטכניקה זו חשוב מאוד:

(1) שה"מקשיב" לא יעיר הערות ולא יציע הצעות, רק ימלא את תפקידו כמקשיב ושואל.

(2) שה"מקשיב" אכן יקשיב.

כדי להבטיח זאת, על המורה לעבור בכיתה ולבקש מה"מקשיב" לדווח לו על המתרחש. ה"מקשיב" מוכרח לתת תשובה והוא לומד זאת עד מהרה. שאלות ההבהרה של ה"מקשיב" נותנות ל"פותר" משוב ביחס לחשיבתו והוא ונותנות ל"מקשיב" מודעות ביחס לתהליכי חשיבה.

ניתן גם להשתמש ברשמקול או ביומן לשם רישום מחשבות על בעיה שמנסים לפתור או על אסטרטגיות אפשריות לפתרון. הרשמקול או היומן ממלאים את תפקיד בן/בת הזוג. בעזרת ה"דיבור בקול רם" מפתחים התלמידים מודעות לתהליכי פתרון הבעיות ולתהליכי החשיבה שלהם.

עבודה בקבוצות בנות ארבעה עד חמישה תלמידים:

החלוקה לקבוצות יכולה להיעשות באופן שרירותי (על-פי מקומות הישיבה), או על-ידי המורה, או בדרך של חלוקה מכוונת לקבוצות הטרוגניות וכו'. העבודה בקבוצות היא לצורך דיון וגיבוש הצעות או רעיונות, או לשם פתרון תרגילים ובעיות.

אחרי העבודה בזוגות או בקבוצות אפשר לערוך דיון כללי בתהליך פתרון הבעיה, תוך הדגשת הצדדים החזקים והחלשים, הטכניקות וההצעות המוצלחות והמכשולים. התלמידים מדווחים על אבחנותיהם ביחס לתהליך החשיבה שלהם וכיצד ניתן, לדעתם, לשפרו.

אפשר גם שלכל קבוצה יהיה "דובר", שיציג את תוצאות העבודה בקבוצה בפני שאר הכיתה והמורה.

העלאה חופשית של רעיונות (סיעור מוחות). במקרים רבים נבקש מהתלמידים להעלות רעיונות רבים ככל האפשר, מסוגים שונים, אפילו רעיונות "משוגעים". למשל, נבקש מהם לומר כל מה שידוע להם על מדידות ואמצעי מדידה, או נבקש מהם להעלות השערות שונות ביחס לפתרון של בעיה, או ביחס לנוסחה מסוימת, או באשר לסיבות לכך שמהו אינו נכון, או שנבקש מהם לחש פתרונות לבעיה וכו'.

בשלב זה של העלאה חופשית של רעיונות, הדגש הוא על שטף של רעיונות רבים, מגוונים ויצירתיים. בדרך-כלל עולים בתחילה הרעיונות השגרתיים, אבל מרגע שעולה הרעיון ה"משוגע" או ה"שונה" הראשון, מתחילים לזרום רעיונות מגוונים נוספים². כדאי לעודד את התלמידים לומר כל מה שעולה על דעתם, וכן לקבל כל רעיון ולא לעסוק בשיפוט או בהערכה של הרעיונות. בשלב מאוחר יותר יש להתייחס לכל הרעיונות בכוונה למיין ולסווג אותם. ייתכן שהרעיונות ה"משוגעים" לא יהיו ישימים, אבל אולי ניתן יהיה להתקדם מהם למשהו הגיוני ופורה.

2 טכניקה מוכרת לשם כך היא חבישת "כובע ירוק"; ראו למד את ילדך לחשוב מאת אדוארד דה-בונו, הוצאת מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה, ירושלים 1993.

בדרך כלל, מקובל שהעלאה חופשית של רעיונות נעשית במסגרת קבוצה, והנוהג מוכיח את עצמו, בעיקר כאשר מחכים לבואו של הרעיון השונה שמביא בעקבותיו רעיונות שונים נוספים. אבל, אל נשכח שהמטרה היא להקנות הרגלים וכלים לחשיבה אשר יאפשרו לתלמידים לעבוד בעצמם. לכן, יש לבקש מפעם לפעם שכל תלמיד יבצע בעצמו העלאה חופשית של רעיונות וירשום את רעיונותיו שלו.

התבססות על המוכר. ההיגיון של האלגברה מבוסס על ההיגיון של החשבון; המופשט מבוסס על המוחשי; בעיה חדשה דומה או מזכירה בעיה מוכרת; המושגים מתבססים על חוויותיו והתנסויותיו של הלומד – למשל, 'מהירות' אינו מושג מבודד אלא קשור למד המהירות במכונית המשפחתית, למדידות מרחק וזמן בתחרויות ריצה והליכה; שימוש במטפורות – עשיית קישורים בין מה שהתלמיד כבר יודע לבין רעיון חדש שמציגים בפניו, ועידוד התלמידים להציע מטפורות משלהם.

הקדשת זמן לחשיבה על החשיבה ולהגברת המודעות לכלי החשיבה, לדרך העבודה על כל שלביה, ולהערכת גישות מוצלחות ובלתי-מוצלחות לפתרון הבעיה.

בתחילה, כאשר התלמידים עדיין אינם מאומנים, יכול/ה המורה להדגים כיצד הוא או היא חשבו על הדברים, כיצד אימצו לעצמם נקודת מבט, כיצד תכננו את העבודה, ואולי אף במה נכשלו. בכל פרק ייעשו שני סיכומים:

- (1) סיכום תוכן הדברים שנלמדו במהלך הפרק – מה למדנו בפרק זה?
- (2) סיכום מטה-קוגניטיבי – התבוננות על הדרך שבה חשבנו. סיכום זה ייערך לאחר ביצוע התרגילים. שני הסיכומים ייעשו על-ידי הלומדים, וניתן לעשותם גם בקבוצות. סיכום השיעור ייעשה על-סמך סיכומי התלמידים.

אנו עוסקים לא רק בהבנת בעיות, אלא גם בכתיבת בעיות – גם כתיבת בעיות המתעוררות כתוצאה מניסיון לספק צרכים מעשיים ("בעיות מהחיים"), וגם בעיות המתבססות על דוגמאות שיש בהן כדי לתרום לפיתוח חשיבה בונה ויצירתית. מי שיודע לשאול – גם יודע טוב יותר לענות. מי שהתנסה בחוויה של חיבור בעיות, יבין טוב יותר את דבריהם של אחרים המציגים בעיות. מי שהתנסה במעבר מביטוי המכיל סימנים למילים, יקל עליו להמיר מילים לסימנים.

פתרון בעיות ו"עולם הבעיה"

כאשר אנו באים לרופא ומתלוננים על משהו שמטריד אותנו, בדרך כלל איננו מצפים שהרופא ישלף מיד תרופה ויפתור את הבעיה.

בדרך כלל, הרופא רוצה קודם להתמצא ב"עולמנו הרפואי". הוא בודק אותנו, שואל שאלות, מברר את ההיסטוריה הרפואית שלנו – הרקע שממנו צמחה הבעיה – מסתכל בתיק הרפואי, מבקש לבצע מספר בדיקות נוספות, מברר קשר אפשרי בין גורמים שונים של הבעיה, ורק כאשר יש לו מיפוי מלא של כל מה ששייך לבעיה הוא חושב ומחליט על תרופה.

רופא טוב – רופא "מומחה" – מפתח "כלי עבודה" במהלך הכשרתו ומתוך ניסיון. הוא יודע בדיוק מה צריך לשאול ואילו בדיקות יש לבצע, ומניסיונו הוא יודע לסווג את המקרה ואולי גם מכיר מקרים דומים. הוא מכיר תגובות קודמות, ועל סמך הידע, הניסיון ושיקול הדעת שלו הוא מציע פתרון. הפתרון לא תמיד מצליח – אולי משום שהמקרה שלנו אינו זהה למקרים הדומים האחרים. ואז שוב צריך לאתר את הבעיה ולנסות פתרון אחר; ויש מחלות שאין להן פתרון.

בדרך דומה, כאשר אנו עומדים בפני בעיה במתמטיקה או בכל נושא אחר לא יהיה זה נכון לנסות ולפתור אותה מיד. לפני כן יש להתמצא ב"עולם הבעיה" על כל סממניו, לאתר את הבעיה, להגדיר אותה ואז לנסות לפתור אותה. אם ניסיונו גדול, יש להניח שיקל עלינו לפתור את הבעיה. אם לא מצליחים – יש לשוב ולבחון האם קיימים נתונים שלא הובאו בחשבון ולנסות פתרון אחר; ויש בעיות שאין להן פתרון. קיים תחום בפילוסופיה העוסק בסוגי ידיעה. אחת ההבחנות הרווחות היא בין "לדעת ש..." ובין "לדעת איך...". דבר אחד הוא לדעת שכך וכך, ודבר אחר הוא לדעת איך לעשות משהו. ד" פרקינס, פרופסור בבית הספר לחינוך של אוניברסיטת הרווארד הוסיף סוג נוסף של ידיעה: ההתמצאות בתחום כלשהו. "למשל, לאחר שנים של הוראה בהרווארד אני מתמצא בכיכר הרווארד. התמצאות זו היא עשירה למדי. יש לי מפה מנטלית של סביבת הכיכר, אני יכול לאלתר קיצורי דרך, יש לי זיקות שונות לנקודות שונות בה. ידיעה מופשטת וחושנית שלה וכו'. זוהי ידיעה עשירה ביותר". לפיכך, הרחיב פרקינס את מושג האינטליגנציה הנלמדת וכלל בו גם "חשיבה התמצאותית", חשיבה שהיא רב-ממדית באופיה.

כדי שהלומד ידע לפתור בעיה עליו **להתמצא ב"עולם הבעיה"**.

דרך העבודה

כל פרק כולל הקדמה ובה מוצג כלי עבודה מסוים ומפורטות המטרות שברצוננו להשיג באותו פרק. לאחר מכן הכיתה עובדת בסיוע המורה על מספר דוגמאות. העבודה יכולה להיות מגוונת: דיון בכיתה, עבודה בקבוצות, עבודה יחידנית, הדגמה של המורה הכוללת את תיאור הדרך שבה הוא חשב וכדומה. בסיום העבודה על הדוגמאות יסוכם הפרק מבחינת תוכנו (מה למדנו בפרק) ומבחינת החשיבה (איך חשבנו, האם פיתחנו שיטה או אסטרטגיית חשיבה, מה ניתן לשפר וכו'). התרגילים מיועדים לעבודה עצמית בתיווך המורה, או לשיעורי בית.

כל אחד מפרקי המבנית מציג כלי חשיבה חיוני לפתרון בעיות במתמטיקה שהתברר כ"בעייתית".

הערות המיועדות למורים בלבד מובאות בתוך מסגרת כפולה (כמו המסגרת המקיפה מילים אלה).

1. הספר מיועד לתלמידי חטיבת הביניים, אך יכול גם לשמש גילאים אחרים. מאחר שמדובר בכיתות שונות ומגוונות, ייתכן שלא כל שאלה מתאימה לכיתה הספציפית שלכם. לפני שאתם מציגים דוגמאות או בעיות בפני התלמידים עליכם לבחון היטב את רמת השאלות ואת הרלבנטיות שלהן לכיתתכם. ייתכן גם שיתברר שחסר לתלמידים חומר משנים קודמות והמורה יצטרך להשלים.
2. ייתכן שבכיתות מסוימות אפשר לעבור על הפרקים 3-5 במהירות.
3. הפרקים 6, 7, ו-8 חייבים להילמד ברצף.
4. עליכם להחליט, על פי היכרותכם עם הכיתה, אם התרגילים (כולם או חלקם) ישמשו לשיעורי בית או לעבודה עצמית בכיתה.