

חשיבה על חשיבה באמצעות חידות*

גדעון ונר

נ נתח הפעם שתי חידות המזמנות חשיבה מתמטית. האחת היא חידת התאים שהופצה בראש השנה. השנייה היא חידת הגורים מהעלון הקודם. ההתייחסות לשתי חידות אלה תאפשר לנו לחדד היבטים מסוימים של חשיבה מתמטית, ולהראות שיש בה לא רק היבטים של סדר והיגיון, אלא גם שימוש ניכר באינטואיציה (אינטואיציה מתמטית).

נזכיר תחילה את **חידת התאים**:

בבית-הספר 1000 תלמידים.

בחדר ההלבשה 1000 תאים בדיוק.

אחד התלמידים עובר מתא לתא ודואג לכך שכל התאים יהיו פתוחים.

תלמיד שני ייגש וסוגר את התא השני, הרביעי, השישי, וכו'. כלומר, הוא סוגר את כל התאים הזוגיים.

תלמיד שלישי מטפל בכל התאים שמספרם מתחלק ב-3, פותח את התאים הסגורים וסוגר את התאים הפתוחים.

תלמיד רביעי מטפל בכל התאים שמספרם מתחלק ב-4, פותח את התאים הסגורים וסוגר את התאים הפתוחים.

תלמיד חמישי עושה את אותו הדבר לגבי התאים שמספרם מתחלק ב-5.

וכך הלאה.

אחרי שהתלמיד האלף סיים את פעולתו - אילו תאים יהיו פתוחים, ואילו תאים יהיו סגורים?

למי שטרם התמודד עם חידה זו נציע להתייחס למספר שאלות לפני שעוברים הלאה:

1. האם יש לכם תחושת בטן לגבי הפתרון?

לא תחושה עמומה תחושה ברורה:

2. האם יש לכם תחושת בטן לגבי **כיוונים** שבהם כדאי **לחפש** פתרון?

לא תחושה עמומה תחושה ברורה:

3. כיצד לדעתכם יבוטא הפתרון?

בנוסחה מתמטית במילים ספורות בכמה משפטים

4. האם אתם מכירים כלים או טכניקות מתמטיות שעשויות לסייע בפתרון החידה? אם כן, אילו?

5. כיצד לפי דעתכם ייגש מתמטיקאי לפתרון החידה?

פרופ' עוזר שילד, יו"ר המזכירות הפדגוגית, שלח לנו את תהליך החשיבה הבא, בליווי פתרון והוכחה (ההערות בסוגריים - שלי ג"ו):

תהליך החשיבה:

1. ברור מיד שכל התאים שמספרם ראשוני יהיו סגורים (בסוף התהליך). האם ייתכן שכל התאים יהיו סגורים?

2. לא, כבר תא מספר 4 יהיה פתוח - נסגר על ידי תלמיד 2 ונפתח על ידי תלמיד 4. האם זה נכון גם לגבי ריבועים אחרים? מספר בדיקות מאששות זאת.

3. השערה: כל התאים סגורים, למעט אלה שמספרם הוא ריבוע. כיצד להוכיח או לסתור? נתבונן תחילה במקרה הכללי, כלומר, בתאים הסגורים.

4. כדי שתא יהיה סגור, מספר השינויים אחרי התלמיד הראשון חייב להיות אי זוגי. נראה מבטיח יותר לחפש הוכחה שמשהו הוא זוגי, כלומר, שינויים מתרחשים בזוגות, כך ששני הגורמים בזוג מבטלים זה את זה. כלומר, יש לשקול את כל השינויים חוץ מהאחרון, כאשר תלמיד N משנה את מצבו של תא N.

5. בכל חלוקה של שלמים המנה היא גם מחלק - ואלה הם הזוגות! וזה פותר מיד גם את סוגיית המספרים שהם ריבועים, שעבורם אחת המנות שווה למחלק, כך שזוג "גורמים" מייצר שינוי אחד בלבד.

6. נותר רק לרשום את ההוכחה באופן פורמלי, כבדיקה לתהליך החשיבה.

פתרון (זוהי ההשערה משלב 3):

כל התאים יהיו סגורים, למעט אלה שמספרם הוא ריבוע (במילים אחרות: שיש להם שורש ריבועי שלם).

הוכחה:

יהא N מספרו של תא. אם d מחלק את N (ללא שארית), אזי גם $d' = N/d$ הוא מחלק של N .

אם d שונה מ- d' עבור כל d , אזי מספר המחלקים הוא זוגי, ומספר המחלקים ללא 1 הוא אי זוגי. מכיוון שהתלמיד הראשון פותח את התא שמספרו N , יוביל מספר השינויים האי זוגי (במצבו של התא) לכך, שהתא יהיה סגור בסוף התהליך.

ואולם, אם קיים d שעבורו $d' = d$, מספר השינויים יהיה זוגי, והתא יהיה פתוח בסוף התהליך. זה יכול להתרחש רק עבור d אחד, ומכאן נובע ש- N הוא ריבוע: $N = d \times d' = d^2$.

תיאור זה מספק הצצה אל היבט מרכזי של החשיבה המתמטית: האופן שבו אינטואיציה ותהליכי בדיקה מסודרים שלובים זה בזה. יש לפחות ארבעה מקומות שבהם נעשה שימוש באינטואיציה מתמטית בתהליך החשיבה שתואר:

- בשלב 1: ההתייחסות לראשוניים מיד בתחילה
- בשלב 2: הפניית תשומת הלב אל מספרים ריבועיים לאחר בדיקת מקרה פרטי אחד בלבד (4).
- בשלב 3: ההחלטה לבחון תחילה את המקרה הכללי, כלומר, לשאול מהם התנאים לכך שתא יהיה סגור.
- בשלב 4: "נראה מבטיח יותר לחפש הוכחה שמשוואה היא זוגית".

כיצד להסביר את האינטואיציה המתמטית? על-פי מודל האינטליגנציה הנלמדת של דיוויד פרקינס, נוכל לראות כאן ביטוי של **מרכיב ההתנסות או המומחיות** של האינטליגנציה (experiential intelligence). מי שהתחום המתמטי מוכר לו, רגיל לכך שהיבטים רבים של עולם המספרים קשורים בתכונות המיוחדות של מספרים ראשוניים; רגיש להכללות אפשריות לאחר בדיקה של מספר דוגמאות; מודע לכך שהכללות כאלה צריך לבדוק; וכד'.

היבט שני של החשיבה המתמטית המתגלה כאן הוא **העלאת השערות**. יש שני מקומות בתהליך החשיבה שבהן מועלות השערות. בשלב הראשון מועלית ההשערה שכל התאים סגורים. בשלב השלישי מועלית ההשערה שכל התאים סגורים, למעט אלה שמספרם הוא ריבוע. כל אחת מהשערות אלה נבדקת מיד לאחר שהיא מועלית. הראשונה מתגלית כמוטעית והשנייה מתגלית כנכונה, אך כל אחת מהן מספקת כיוון לחשיבה.

מעניין לציין שבהוכחה המתמטית הפורמלית נעלמים חלק ממאפייני החשיבה המתמטית שנסקרו לעיל, ובפרט, ההיבטים האינטואיטיביים. נעלמו גם ההשערה (המוטעית) מהשלב הראשון, ובדיקת המקרה הפרטי מהשלב השני. ההוכחה מורכבת בעיקרה משורת היסקים מהצורה "אם... אז...", וסגנונה הוא קצר ונקי, ללא פרטים מיותרים.

למה זה חשוב? משום שקשה מאוד, ואולי בלתי אפשרי, להבין את היבטיה המרכזיים של החשיבה המתמטית שהופעלה כאן מתוך ההוכחה הפורמלית בלבד. בהכללה, מי שינסה להבין את החשיבה המתמטית מתוך הוכחות פורמליות, יחמץ חלק מרכזי ומהותי מן העניין. מכאן נובע, שאם רוצים לעודד תלמידים לפתח אינטואיציה מתמטית והבנה מתמטית מעמיקה, חשוב להעלות למודעותם את היבטי החשיבה המתמטית, לתת לגיטימציה להיבטים האינטואיטיביים, ולאפשר להם להתנסות בניחוש פתרונות וכיווני פתרון כחלק משמעותי מלימודי המקצוע.

על מנת להצביע על עצמתה של האינטואיציה המתמטית שהופעלה בחידת התאים, נצביע על מספר כיוונים אחרים שאליהם יכולה היתה האינטואיציה להוביל. למשל, בשלב השני, נמצא שהמקרה הפרטי "4" מסתיים בתא פתוח, והועלתה השאלה "האם זה נכון גם לגבי ריבועים אחרים?" במקום זאת, ניתן היה לשאול אם זה נכון לגבי תאים זוגיים, או תאים שמספרם מסתיים ב-4, ולהחמץ את כיוון הבדיקה החשוב של מספרים ריבועיים.

עוד קודם לכן, בשלב הראשון, מופנית תשומת הלב למספרים ראשוניים. למרות שזו התחלה מבטיחה, אפשר לטעות גם בה. הנה קטע מתוך תהליך חשיבה אחר, שבו נמשכת החשיבה על הראשוניים יתר על המידה:

כל ראשוני מתחלק רק בעצמו וב-1, לכן כל התאים הראשוניים יהיו סגורים (הראשון פתוח ורק עוד אחד יתייחס אליהם ויסגור אותם).

כל מספר שהוא מכפלה של שני ראשוניים יקבל שינוי מצב 4 פעמים בדיוק (פעמיים בשל שני כופליו, פעם בשל עצמו ופעם בשל המספר 1). לכן גם כל מספר שהוא מכפלה של שני ראשוניים יהיה סגור.

כל מספר שהוא מכפלה של שלושה ראשוניים... יתחלק בעצמו וב-1 (את זה כבר אין צורך לציין, זה נכון לכל המספרים); ב-3 הראשוניים הללו; אבל גם ב-3 מכפלות של שניים מתוך הראשוניים הללו; סה"כ יתחלק במספר זוגי של מספרים, כלומר, יזכה למספר זוגי של ביקורים, ועל כן, יישאר במצבו המקורי (סגור). רגע, בדיקה: שלושת הראשוניים הללו צריכים להיות שונים זה מזה.

דוגמא: המספר 2 כפול 3 כפול 5 (30) הוא מכפלה של 3 ראשוניים. הוא מתחלק גם ב-6, 10, 15-1.

מה קורה כאשר שלושת הראשוניים אינם שונים זה מזה? דוגמא: 2 כפול 3 כפול 3 הם 18. 18 מתחלק גם ב-6 וב-9.

התקח ביקור אחד של ראשוני, אבל בדיוק בשל

דלמטים; קיבל ממנו לפני כן את בקשתו בטלפון; וכד'.

(3) חלק מהגורים אילו (אך גם אם הפודל שקיבל הקונה הראשון היה הפודל האחרון, כיצד ידע המוכר שהשני רוצה דלמטי ולא כלב רועים? אי אפשר להניח שאילו כלבי הרועים, כי הראשון נשאל אם הוא רוצה כלב רועים).

פתרון לוגי-מתמטי של החידה מתקבל אם מניחים שלוש הנחות:

א. מאה השקלים שהניח הקונה השני על הדלפק היו שונים מאלה שהניח הקונה הראשון; הראשון הניח שטר של מאה שקלים ואילו השני הניח מספר שטרות או מטבעות: חמישה שטרות של 20 שקלים למשל, או שטרות ומטבעות בערכים של 20, 20, 20, 10 ש"ח.

ב. המחירים של שלושת סוגי הגורים שונים: הדלמטי עולה 100 ש"ח ואילו הפודל וכלב הרועים עולים פחות מכך (למשל, 80 או 60 ש"ח).

ג. מחירי הגורים מוצגים לעיני הקונים.

אם מניחים הנחות אלה, התנהגותו של המוכר טבעית וברורה:

כאשר הקונה הראשון מניח שטר של מאה שקלים על הדלפק, אין המוכר יכול לדעת אם הוא רוצה לקנות גור ב-100 ש"ח או בפחות מכך, ולכן הוא שואל. (המוכר גם מניח שאין לקונה שטרות קטנים יותר).

כאשר הקונה השני מניח את כספו על הדלפק, למוכר ברור שהוא מתכוון לגור שעולה מאה שקלים, משום שאחרת היה מניח על הדלפק את הסכום המדויק, הנמוך יותר, שעולה פודל או כלב רועים.

אפשר להצביע על עוד הנחה שעליה מתבסס הפתרון הזה: שהקונים והמוכר מתייחסים לתשלום ולעודף באופן הגיוני, כלומר: הקונים מניחים על הדלפק את הסכום המדויק של הקנייה שלהם, אלא אם כן אין להם הסכום המדויק, ואז הם מניחים סכום גדול יותר, ומצפים לעודף. כך אנו נוהגים בדרך כלל בקניה של מוצרים בחנויות.

ועתה לחידה חדשה:

תלת-קרב

צלף, חייל ואזרח עומדים לערוך ביניהם תלת-קרב באקדחים. הם יעמדו בקדקודי משולש, וכל אחד יירה בתורו, עד שרק אחד יוותר בחיים.

הצלף פוגע במטרתו תמיד. החייל פוגע במטרתו ב-2/3 מהמקרים והאזרח פוגע במטרתו ב-1/3 מהמקרים. בשל כך, סוכס שהאזרח יירה ראשון, אחריו - החייל, אחריו - הצלף, וחוזר חלילה. לאן כדאי לאזרח לכוון את ירייתו הראשונה?

כן התקדז גם ביקור אחד של מכפלת שני ראשוניים. ושוב התא יהיה סגור בסוף.

רגע, בדיקה חחרת של המצב של מכפלת שני ראשוניים זהים (ריבוע של ראשוני): 5 כפול 5 הם 25. הוא מתחלק רק ב-5 (מלבד בעצמו וב-1, שאמרנו שלא צריך לספור). תא מס' 25 יזכה למספר אי זוגי של ביקורים (שלושה) ועל כן יישאר פתוח!!!

ובהכללה פשוטה: כל ריבועי הראשוניים יהיו פתוחים בסוף התהליך.

תהליך חשיבה זה דומה לקודם בכך שיש בו קביעה, המתגלית בהמשך כמוטעית ("יכל מספר שהוא מכפלה של שני ראשוניים יהיה סגור"). הבדל דק אך משמעותי הוא, שבתהליך החשיבה הראשון מנוסחת הקביעה המוטעית באופן ברור כשאלה שיש לבדוק אותה ("האם ייתכן שכל התאים יהיו סגורים?"), ואילו בתהליך החשיבה השני היא מנוסחת כקביעה. הספקנות והזהירות המאפיינות את החשיבה המתמטית מופיעות בבירור בתהליך הראשון, וחסרות בתהליך השני. בהתייחס לספקנות מתמטית, הוארד גרדנר מצטט בספרו Frames of Mind את המתמטיקאי אלפרד אדלר:

"המתמטיקאי המומחה... אוהב לעסוק בהפשטות; חייב להיות יסודי ביותר (בחשיבתו) ולהטיל ספק באופן מתמיד. שום עובדה אינה יכולה להתקבל אלא אם כן הוכחה באופן שיטתי, בשורת צעדים הנובעים מעקרונות ראשוניים מוסכמים."

לפני שנעבור לחידה מהפעם שעברה, נציע לכם כעת לחזור לשאלון הקצר שבתחילת המדור ולבדוק את התייחסויותיכם שם לאור הניתוח עד כה.

נוכיר עתה את חידת הגורים מהגיליון הקודם: שני אנשים נכנסו לחנות לבעלי חיים אשר הציעה גורי כלבים למכירה. האחד הניח על הדלפק מאה שקלים וביקש גור כלבים. המוכר שאל אם הוא מעוניין בכלב רועים, בכלב דלמטי, או בפודל. האיש כחר בפודל. גם האדם השני הניח מאה שקלים על הדלפק וביקש גור כלבים. המוכר לא אמר דבר ונתן לו גור דלמטי. כיצד ידע שזה מה שאותו אדם רצה?

חידה זו עוררה תסכול אצל מספר פותרים שתיעדו את תהליכי החשיבה שלהם. כיווני החשיבה שהוצעו הם רבים:

- (1) האדם השני סימן או רמז למוכר בדרך כלשהי (כיוון המבט, ליטוף הגור, וכד') שהוא מעוניין בגור דלמטי. הראשון לא סימן ולא רמז.
- (2) המוכר ידע מה האדם השני רוצה ללא קשר למה ששם על הדלפק (הכיר אותו וידע שאוהב

ספרים חדשים בהוצאת מכון ברנקו וייס

ללמוד בקצב שונה - סגנונות חשיבה ולמידה/ פאט גילד וסטפן גרגר

הספר ללמוד בקצב שונה - סגנונות חשיבה ולמידה נותן תוכן ממשי לסיסמה החביבה על הכל: "הילד במרכז"; חינוך המתנהל לאורן של תיאוריות של סגנונות חשיבה ולמידה הוא, אכן, חינוך המתרכז ביחיד. הספר סוקר בלשון בהירה תיאוריות בולטות של סגנונות חשיבה ולמידה ומראה כיצד ניתן ליישמן בתקשורת וביחסי מורה-תלמיד, בהערכה ובפיקוח, בסגנונות ובשיטות הוראה, ביעוץ ובתוכנית הלימודים. המושג "סגנונות חשיבה ולמידה" הוא מושג מרכזי בתיאוריות של חינוך והוראה בעשור האחרון וספר מבואי זה נותן לקוראים הזדמנות מצוינת להכירו.

ד"ר פאט גילד היא נשיאת "אגודת פאט גילד" בסיאטל - ארגון המכשיר מנהלים, מורים, הורים ואנשי עסקים להשתמש בסגנונות חשיבה ולמידה להגברת היצירתיות בעבודתם; מתאמת של "תוכניות סגנונות הלמידה"; מלמדת באוניברסיטת פסיפיק של סיאטל; לימדה באוניברסיטת וושינגטון ובאוניברסיטת סיאטל; פעלה במסגרת הכשרת מורים במשך 15 שנים; היתה מנהלת בית-ספר יסודי במסצ'וסטס ומורה בבית-ספר בניו-יורק; נושא הדוקטורט שלה הוא "סגנונות למידה: ידע, סוגיות ויישום בכיתה".

ד"ר סטפן גרגר היה מורה, יועץ ומנהל בית-ספר במקומות שונים בארצות-הברית, ויישם בכל תפקידיו את הרעיון של סגנונות חשיבה ולמידה; ניהל סדנאות וקורסים רבים למורים, להורים ולסטודנטים באוניברסיטאות אחדות בארצות-הברית; הוא מנהל Issaquah (Wash.) School District's Alternative School נושא הדוקטורט שלו הוא "סגנונות למידה: מצב הידע ותכנון תוכנית הלימודים".

בחיפוש אחר הבנה - לקראת כיתה קונסטרוקטיביסטית/ ז'קלין גרנון ברוקס

הספר בחיפוש אחר הבנה - לקראת כיתה קונסטרוקטיביסטית מחלץ מהתיאוריה הקונסטרוקטיביסטית - תיאוריה על ידע ולמידה השלטת כיום בחינוך - חמישה עקרונות פוריים להוראה. הוראה המבוססת על חמישה עקרונות אלה יוצרת תנאים מיטביים לבנייה של הבנה של הנושאים הנלמדים בכיתה. הספר כתוב בנוסח בהיר ושווה לכל נפש ומדגים כיצד ניתן ליישם את עקרונות ההוראה הקונסטרוקטיביסטית בכיתה. הספר זוכה להצלחה רבה בארצות-הברית ומחוצה לה ועקרונותיו מיושמים בבתי-ספר רבים.

ד"ר ז'קלין גרנון ברוקס היא חברה ב"מרכז לחינוך למדעים, למתמטיקה ולטכנולוגיה" ומנהלת "המעבדה להוראת ביוטכנולוגיה ב-SUNY, Stony Brook, ומכהנת כנשיאת "האגודה להוראה קונסטרוקטיביסטית". ד"ר מרטין ג' ברוקס הוא מפקח ב-Valley Stream School District Thirteen בניו-יורק.

פיסיקה לכל/ פול ג' היואיט

הספר פיסיקה לכל נועד להעניק לקוראיו תחושה עמוקה של הבנת מושגי הפיסיקה. הספר כתוב בשפה פשוטה ובהירה, בלויית דוגמאות ואיורים וכן מגוון תרגילים, שאלות למחשבה והצעות לניסויים. בבסיס הספר כמה עקרונות:

- מבט מקיף ורחב: החל מפרק 1 - תנועה על קו ישר, ועד פרק 35 - תורת היחסות הכללית.
- לימוד להבנה: כל הנושאים מטופלים דרך העקרונות ורק לאחר מכן מגיעים החישובים.
- קישור לחיי היומיום: שפע ניסויים ותצפיות לביצוע בכיתה ובבית.
- בהירות: גם הנושאים המורכבים ביותר מוסברים בשפה פשוטה ובלוויית שרטוטים והבהרות.
- שאלות לעבודה ולמחשבה: כל פרק מסתיים בעשרות שאלות תזרה, תרגילים ומטלות לבית.

ספר זה יכול לשרת מגוון רחב של אוכלוסיות: החל ממורים למקצועות המדע והטכנולוגיה בחטיבות הביניים, תלמידי המקצועות הלא-מדעיים בחטיבה עליונה, וכלה בתלמידי פיסיקה.

אוגדן חינוך החשיבה 1996 - אסופת עלונים

חינוך החשיבה הוא אסופת מאמרים נבחרים העוסקים בהיבטים שונים של החינוך לחשיבה. האסופה מבוססת על הרבעון 'חינוך החשיבה' שיוצא מטעם מכון ברנקו וייס במטרה להפיץ את הנושא בקרב מערכת החינוך בישראל.

אוגדן 1996 כורך את עלון מס' 5 העוסק בחינוך לחשיבה ביקורתית, את עלונים מס' 6 ו-7 העוסקים בתפיסות חדשות של האינטליגנציה האנושית, ואת עלון מס' 8 העוסק בתיאוריה של למידה וידע - קונסטרוקטיביזם.

קורט חשיבה 2 - ארגון

חלק זה עוזר לתלמידים לארגן את חשיבתם. חמש ההפעלות הראשונות הן בסיסיות ועוסקות בתנועה קדימה מתוך רעיון התחלתי. חמש ההפעלות האחרות עוסקות בארגון כללי של החשיבה.

קורט חשיבה 6 - פעולה

חשיבה היא פעולה. חשיבה לצורך פעולה. חשיבה פעילה. חלק זה עוסק בתהליך הכולל של החשיבה: החל במטרה, וכלה בצעדי פעולה מסוימים לשם יישום התוצר של החשיבה. חלק זה מבסס את תהליכי החשיבה שנחקרו ותורגלו בקורט חשיבה 5-1.

קובץ ארועים ביזמות / גדעון ונר (עורך)

חינוך ליזמות הוא צורך השעה בעולם דינמי ומשתנה. הגישה היזמית מאופיינת ביכולת לנתח מצבים ולשנותם, וביכולת ליצור מצבים חדשים. טיפוחה של גישה יזמית כרוך בפיתוח עצמאותו המחשבתית של הלומד:

בעידודו ליצירתיות, לחדשנות ולנטילת אחריות: ובעידודו להוציא רעיונות מן הכח אל הפועל. ספר זה מכיל 20 ארועים יזמיים הלקוחים מן העיתונות העסקית. הם מיועדים ללמידה ולהערכה ביחידת הלימוד הראשונה במקצוע היזמות. הארועים המופיעים בספר מספקים הזדמנות ללמוד על אודות הגישה היזמית והתהליך היזמי, ומשקפים את תכנית הלימודים שגיבשה ועדת התכנית למקצוע היזמות במשרד החינוך, התרבות והספורט.

