

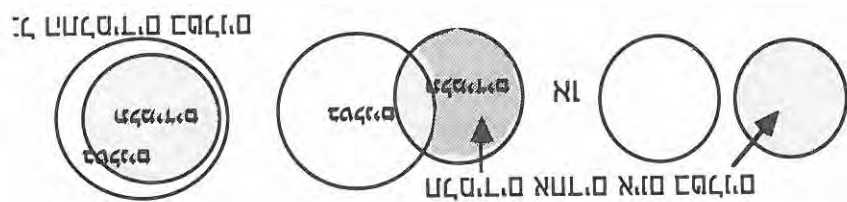
שיעור 9: טענות סותרות, הופכיות, תת-הופכיות, משעבדות ומשועבדות

בשיעור זה נלמד להסיק באופן שיטתי מסקנות שונות הנובעות באופן ישיר מהטענות ההחלטיות מארבעת הסוגים (הצורות התקניות).

כאשר אנו אומרים שאין זה נכון ש"כל התלמידים בטלנים" - האם אנו מתכוונים לומר ש"שום תלמיד אינו בטלן"? ואולי: ש"תלמידים אחדים אינם בטלנים"? וכאשר אנו אומרים: "תלמידים אחדים הם בטלנים" - האם הטענה: "תלמידים אחדים אינם בטלנים" יכולה גם היא להיות נכונה? בשיעור זה נמצא דרך לעשות קצת סדר בשאלות הללו.

טענות סותרות

מה הקשר בין הטענה: "כל התלמידים בטלנים", לבין הטענה: "תלמידים אחדים אינם בטלנים"? אלו הן טענות מסוג אי-ו-די-על-פי הסימון שבו השתמשנו בשיעור הקודם. אנו אומרים שהטענות **סותרות** האחת את השנייה. מה פירוש סותרות? האחת היא שלילתה של השנייה, כלומר כל אחת מהן טוענת שהשנייה שקרית או לא נכונה. **שרטט דיאגרמות המייצגות את כל אחת משתי הטענות. אחר כך השווה עם הדיאגרמות בפרק הקודם.**



מתוך הדיאגרמות אנו רואים שאין שתי הטענות יכולות להיות אמיתיות בעת ובעונה אחת. כי אם מחלקת התלמידים מוכלת כולה במחלקת הבטלנים הרי לא ייתכן שישנם תלמידים שאינם בטלנים. ואם תלמידים אחדים אינם בטלנים הרי שלא ייתכן שמחלקת התלמידים



מוכלת (כולה) במחלקת הבטלנים - וזה בדיוק מה שאומרת הטענה הראשונה. בנוסף על-כך אי-אפשר ששתי הטענות תהיינה שקריות בעת ובעונה אחת. כאשר הראשונה שקרית, פירושו של דבר שתלמידים אחדים אינם בטלנים - ואז הטענה השנייה אינה יכולה להיות שקרית; וכאשר השנייה שקרית, פירושו של דבר שאין זה נכון שתלמידים אחדים אינם בטלנים, דהיינו - כל התלמידים בטלנים; כלומר, הטענה הראשונה היא אמיתית.

שתי טענות סותרות אינן יכולות להיות אמיתיות בעת ובעונה אחת וגם אינן יכולות להיות שקריות בעת ובעונה אחת.

לכן, אם טענה אחת אמיתית, אנו מסיקים שבת-זוגה שקרית, ואם טענה אחת שקרית אז נובע מכך שבת-זוגה אמיתית. שני אלה הם **היסקים ישירים**.

גם טענות מהצורות ב' ו-ג' הן סותרות; האחת היא שלילתה של השנייה. לדוגמה:

"שום חייל אינו פחדן" ו"חיילים אחדים הם פחדנים".

הראה זאת באמצעות שרטוט דיאגרמות המעגלים (דיאגרמות ון) המתאימות.

הבא דוגמאות נוספות לטענות מהצורות התקניות א'-ד', ו-ב'-ד' שהן סותרות.

טענות הופכיות

נתבונן כעת בזוג הטענות: "כל התלמידים בטלנים" ו"שום תלמיד אינו בטלן". זוג טענות החלטיות אלה הן מהצורה א ו-ב והן קרויות טענות **הופכיות**.

האם שתיהן יכולות להיות אמיתיות? האם שתיהן יכולות להיות שקריות?

שרטט את דיאגרמות המעגלים המתאימות ונסה לתת את התשובה בעצמך.

הגעת לתשובה? אם כן, השווה אותה עם התשובה לאחר הקטע הבא. אם לא, קרא את הקטע הבא.



כאשר הטענה הראשונה אמיתית, פירוש הדבר - שאין תלמידים שאינם בטלנים ולכן אין זה נכון שכל התלמידים אינם בטלנים; או, במלים אחרות: אין זה נכון ששום תלמיד אינו בטלן. לכן לא ייתכן ששתי הטענות תהיינה אמיתיות. אולם אם הטענה הראשונה שקרית, כלומר שאין זה נכון שמחלקת התלמידים מוכלת במחלקת הבטלנים, ייתכנו שני מקרים:

1. מחלקות התלמידים והבטלנים זרות, כלומר - שום תלמיד אינו בטלן;
2. החיתוך שבין שתי המחלקות איננו ריק, כלומר - תלמידים אחדים הם בטלנים. במלים אחרות, במקרה 1' הטענה השנייה תהיה אמיתית, ואילו במקרה 2' גם הטענה השנייה תהיה שקרית! כלומר, תיתכן האפשרות שגם הטענה הראשונה וגם הטענה השנייה הן שקריות.

כלומר התשובה היא:

שתי טענות הן הופכיות, אם אי אפשר ששתיהן תהיינה אמיתיות בעת ובעונה אחת, אולם שתיהן, יחד, יכולות להיות שקריות.

מהם ההיסקים הישירים הנובעים מכך?

[illegible]

הבא דוגמאות נוספות לשענות שהן הופכיות.

טענות תת-הופכיות

ומה בקשר לזוג הטענות: "תלמידים אחדים הם בטלנים" ו-"תלמידים אחדים אינם בטלנים"? - אלו טענות החלטיות מהצורה ג' ו-ד' והן קרויות **תת-הופכיות**.
שרטט את דיאגרמות המעגלים, נסה למצוא מהו הכלל לגבי טענות תת-הופכיות והשווה זאת עם התשובה שלאחר הקטע הבא.

ברור ששתי הטענות יכולות להיות אמיתיות.

נוכיח שלא ייתכן ששתי הטענות שקריות: נניח ששתיהן שקריות. אם הטענה הראשונה שקרית, פירוש הדבר ששום תלמיד אינו בטלן (אין אף תלמיד שהוא בטלן); ואם הטענה השנייה שקרית, פירוש הדבר שכל התלמידים בטלנים; אולם שתי טענות אלה הן מסוג ב' ו-א' שהן הופכיות - ולכן אי אפשר ששתיהן תהיינה אמיתיות; לכן לא ייתכן ששתי הטענות המקוריות תהיינה שקריות.



להוכחה מסוג זה קוראים **"הוכחה בדרך השלילה"**: מניחים שמה שמנסים להוכיח אינו נכון, ואם זה גורר מסקנה שאינה נכונה - מסיקים שההנחה (שמה שמנסים להוכיח אינו נכון) איננה נכונה, לכן מה שיש להוכיח הוא נכון!

התשובה היא, לכן: **שתי טענות הן תת־הפכיות אם אי אפשר ששתיהן יחדיו תהיינה שקריות, אולם ייתכן ששתיהן יחדיו תהיינה אמיתיות.**

נסח את ההיסקים הישירים הנובעים מכך. הבא דוגמאות נוספות לטענות שהן תת־הופכיות.

טענות משועבדות

מתוך אמיתות טענה בעלת צורה א' נובעת, כזכור, אמיתות הטענה (המתאימה) בעלת צורה ג'.

למשל, אם הטענה: "כל התלמידים בכיתה ישראלים" אמיתית, נובע מכך שגם הטענה: "תלמידים אחדים בכיתה הם ישראלים" היא אמיתית. גם זה הוא היסק ישיר.

כאשר אנו אומרים "אחדים מהם ישראלים" איננו מתכוונים לשלול את האפשרות שכל התלמידים ישראלים; אם אנו רוצים לשלול את האפשרות האחרונה, נאמר כי "רק תלמידים אחדים ישראלים". משמעות זו תואמת את המשמעות של "קבוצה חלקית" בתורת הקבוצות. אם בכיתה יש ארבעים תלמידים וכולם ישראלים, הרי יהיה זה בוודאי נכון שגם כל קבוצה חלקית מהם מורכבת מישראלים. כאשר אנו אומרים "אחדים", אנו מתכוונים לכל קבוצה חלקית, **כולל הקבוצה כולה** (קבוצה כוללת את עצמה כקבוצה חלקית).

אולם ההיסק בכיוון ההפוך אינו תקף: הטענה "כל התלמידים בכיתה הם ישראלים" אינה נובעת מהטענה ש"אחדים מהתלמידים בכיתה הם ישראלים".

מתוך הטענה (האמיתית) "חיות אחדות הן חתולים" אי אפשר להגיע למסקנה (השקרית) ש"כל החיות הן חתולים".

או מתוך הטענה ש"בעלי־כנף אחדים הם עופות" לא נובע ש"כל בעלי הכנף הם עופות" (מטוסים ומלאכים, למשל, אינם עופות!).

באופן דומה, מתוך אמיתות טענה בעלת צורה ב' נובעת אמיתות הטענה (המתאימה) בעלת צורה ד', אולם לא להיפך. מתוך הטענה "שום סוס-עץ אינו חיה" נובע ש"סוס-עץ אחדים אינם חיות". אולם מתוך הטענה ש"תלמידים אחדים אינם בטלנים" לא נובע ש"שום תלמיד אינו בטלן".

הבא דוגמאות נוספות.

טענה מצורה א' או ב', **שמאמיתותה נובעת אמיתות טענה אחרת, תיקרא משעבדת, והטענה שאמיתותה נובעת ממנה, מסוג ג' או ד' (בהתאמה), תיקרא משועבדת.**

מתי בכל זאת ניתן להגיע למסקנה לגבי אמיתותה או שקריותה של הטענה המשעבדת על



סמך ידיעת ערך-האמת (אמת או שקר) של הטענה המשועבדת?

תשובה: אם ידוע שהטענה המשועבדת שקרית, נובע שגם הטענה המשעבדת המתאימה שקרית. שהרי אם אין זה נכון שאחדים מאיברי המחלקה A הנם (או אינם) B - ברור שגם אין זה נכון שכל איברי A הנם (או אינם) B. כלומר, טענה משועבדת שידוע שהיא שקרית – < טענה משעבדת שקרית.

אם אין זה נכון שפרות משה-רבנו אחדות נותנות חלב, אז בוודאי שאין זה נכון שכל פרות משה-רבנו נותנות חלב.

ואם אין זה נכון שחיילי-שוקולד אחדים אינם מתוקים אז בוודאי שאין זה נכון שכל חיילי-השוקולד אינם מתוקים.

הבא דוגמאות נוספות.

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

טענות סותרות

טענות הופכיות

טענות תת-הופכיות

טענות משעבדות ומשועבדות

הוכחה בדרך השלילה

