

שיעור 13: האלגברה של ההיגיון: הצצה ראשונה לתחשיב הפסוקים

בשיעור זה נעסוק בתחשיב פסוקים: נלמד לחשב האם פסוקים אמיתיים או שקריים. בניסוח אחר: נחשב מהו ערך האמת של כל פסוק. ערך האמת יכול להיות "אמת" או "שקר". (בצורה מקוצרת: "אמת" יצוין כ"א" או 1 ו"שקר" כ"ש" או 0)

פסוקים יכולים להיות פשוטים או מורכבים. פסוק מורכב הוא צירוף של פסוקים פשוטים הקשורים ביניהם בקשרים לוגיים כגון באמצעות וו-החיבור (רוני אוכל ורוני קורא עיתון), או באמצעות מלות הקשר "אם", "או", "אז" (אם אתה רעב או צמא - אז תלך לקיוסק). כדי לקבוע את ערך האמת של פסוק מורכב יש לדעת את ערכי האמת של מרכיביו, ואת חוקי החשבון של הקשר הלוגי.

למשל, כדי לדעת מהו ערך האמת של הפסוק המורכב "רוני אוכל וקורא עיתון" (האם הוא נכון או לא, האם הוא מתקיים או לא) צריך לדעת את ערך האמת של "רוני אוכל", (אמת או שקר), צריך לדעת את ערך האמת של הפסוק "רוני קורא עיתון" (אמת או שקר), ואת חוקי החשבון של וו-החיבור (הפסוק המורכב אמיתי רק אם כל אחד ממרכיביו הוא אמיתי. כלומר, רק אם רוני אכן קורא עיתון וגם אוכל - המשפט המורכב יהיה אמיתי).

בשיעור זה ההיגיון ייראה כאלגברה. אולם לא אלגברה רגילה כפי שאולי כבר נתקלת בה. זוהי האלגברה הפשוטה ביותר הקיימת. יש בה אותיות כמו באלגברה המוכרת לך, ולאותיות מתאימים ערכים מספריים; ויש בה חוקי חשבון.

אלא שבניגוד לאלגברה הרגילה, שבה האותיות מייצגות את המספרים הרגילים, אינסוף המספרים החיוביים ואינסוף המספרים השליליים וגם מספרים מסובכים יותר (מספרים מרוכבים למשל), האלגברה של ההיגיון עוסקת אך ורק בשני ערכים: **ערכי האמת** הידועים לנו, ומהם?

אלו הם "אמת" ו"שקר". (באנגלית "TRUE" ו-"FALSE" או בקיצור T ו-F). **האם אתה מכיר ערך אמת נוסף?** למשל הפסוק "עכשיו יום", או שהוא אמיתי או שהוא שקרי. האם ישנה אפשרות שלישית? אין! זה יעשה לנו את החיים קלים.

לעתים מפשטים את האלגברה של ההיגיון ועוסקים בשני ערכים מספריים: 1 (אמת), 0 (שקר). מה יכול להיות יותר פשוט מאלגברה העוסקת בשני מספרים?! דרך אגב, גם המחשבים מבינים רק את המספרים הללו וכל מה שהם יודעים לעשות מבוסס על האלגברה הזאת.



ובכן, איך נראית האלגברה של ההיגיון?
 נייצג טענות או פסוקים שלמים על-ידי אותיות - r, q, p - בלי להתייחס לתוכנם או למבנה שלהם, וניצור מהם צירופים שונים, כפי שמצרפים משפטים בשפה הרגילה על-ידי וו החיבור או על-ידי מלת הקשר "או".
 למשל, p יכול לייצג את הפסוק: "הכלב נובח", ו- q את הפסוק "הכלב מכשכש בזנבו".
 את הפסוק "הכלב נובח ומכשכש בזנבו" נוכל אז לייצג בקיצור על-ידי: " p ו- q ". ואת הפסוק "הכלב נובח או מכשכש בזנבו" על-ידי: " p או q ".

ומה אומר הפסוק הבא: "אם p אז q "?

אבל זוהי עדיין לא אלגברה. בשביל ליצור נוסחאות אנו זקוקים גם לפעולות חשבון. ומה מתאים כאן לפעולות החשבון כמו החיבור והכפל? - אלו הן בדיוק הפעולות המיוצגות על-ידי מלות הקשר "ו", "או" וכו'.

וו החיבור: הקוניונקציה (conjunction)

ראשית, נראה כיצד נייצג את הצירוף של שני פסוקים על-ידי וו החיבור או על-ידי מלת הקשר "וגם". בלוגיקה מצינים את מלת הקשר הזאת על-ידי נקודה (או על-ידי הסימן $\&$). למשל, אם את הפסוק "הכלב נובח" נציין ב- p ואת הפסוק "הכלב מכשכש בזנבו" נציין ב- q , אזי את הצירוף "הכלב נובח ומכשכש בזנבו" נציין על-ידי: $p \& q$ (או $p \& q$). לטענה המורכבת הזאת אנו קוראים **הקוניונקציה** (שמשמעה צירוף) של p ו- q .
 הטענה הבאה יכולה להיות מיוצגת על-ידי קוניונקציה: "ראובן הוא קצב ושמעון הוא ירקן". **מה יהיו שני הפסוקים p ו- q המרכיבים את הקוניונקציה?**
האם לדעתך ניתן לייצג את הטענה הבאה כקוניונקציה: "ראובן ושמעון הם אחים"?

אמנם וו החיבור מופיע בפסוק, אך אין הוא צירוף של שני משפטים פשוטים.

על-ידי הצגת טענות מורכבות בצורה כזאת, ניתן לקשר בין ערכי האמת של הטענה המורכבת לבין ערכי האמת של הטענות המרכיבות.
 כפי שהאינו, מציבים במקום כל אות אחד משני הערכים "אמת" או "שקר" (או 1 ו-0).

מה יהיה ערך האמת של $p \& q$ כאשר שני ה"מחוברים" p ו- q אמיתיים?

אם הפסוק "ראובן הוא קצב" הוא אמנם אמיתי והפסוק "שמעון הוא ירקן" גם הוא אמיתי, אזי הקוניונקציה "ראובן הוא קצב ושמעון הוא ירקן" תהיה אמיתית - תקבל את הערך "אמת". כלומר, אם p מקבלת את הערך "אמת" וגם q מקבלת את הערך "אמת" - גם הקוניונקציה $p \& q$ תקבל את הערך "אמת".



ומה אם שני הפסוקים p ו- q שקריים, כלומר ראובן אינו קצב ושמעון אינו ירקן?
אז ברור שהקוניונקציה תהיה שקרית.

ומה אם רק אחד מהפסוקים p או q שקרי?
אם, למשל, ראובן הוא קצב ואולם שמעון אינו ירקן - האם הקוניונקציה "ראובן הוא קצב ושמעון הוא ירקן" אמיתית או שקרית?
תשובה: הקוניונקציה שקרית. וזאת כיוון שהקוניונקציה טוענת שראובן הוא קצב וגם שמעון הוא ירקן, וזה לא נכון.

כאשר אנו טוענים את הטענה המורכבת, אנו מתכוונים שהיא אמיתית כפי שהיא, ואפילו אם רק פרט אחד מהפרטים היוצרים את הקוניונקציה הוא שקרי - הטענה שקרית.

בתורת ההגיון שבה אנו עוסקים אין "חצאי אמיתות"; או שהטענה אמיתית או שהטענה שקרית - אין מקרי ביניים. כבר נתקלנו במקרה דומה: כאשר אנו אומרים "כל התלמידים בבית-הספר עברו את הבחינה בתנ"ך", אזי מספיק שתלמיד אחד מתוך אלף תלמידי בית-הספר לא עבר את הבחינה, בכדי לומר שהטענה שקרית. גם אם רק אחד מתוך מיליון חורג מההכללה, זה הופך אותה לשקרית (לעומת זאת, אם הטענה היא: "הרוב המוחלט של תלמידי בית-הספר עבר את הבחינה בתנ"ך", אזי הטענה אמיתית). אפשר לבטא את הטענה הכוללת כקוניונקציה: במקום לומר כי כל תלמידי בית-הספר עברו את הבחינה, ניקח את הרשימה הכוללת של כל התלמידים ונבטא את הטענה המורכבת: "אביבי עבר את הבחינה ואברהמי עבר את הבחינה ואהרונ עבר את הבחינה..." וכך הלאה עד התלמיד האלף, זו תהיה קוניונקציה בת אלף "מחברים". לקוניונקציה זו אותה המשמעות כמו להכללה. ואז מספיק שמחבר אחד יהיה שקרי בכדי שהקוניונקציה כולה תהיה שקרית.

לסיכום: קוניונקציה היא אמיתית אם כל ה"מחברים" אמיתיים, והיא שקרית בכל מקרה אחר. אם ראובן אינו קצב ושמעון אינו ירקן אז הקוניונקציה שקרית; ואם ראובן הוא אכן קצב אבל שמעון אינו ירקן, הקוניונקציה שקרית; ואם ראובן אינו קצב ושמעון הוא ירקן, גם אז הקוניונקציה שקרית.

את הקשר בין ערכי האמת של p ו- q לבין ערך האמת של $p.q$ נוכל אפוא לבטא כך:

כאשר p אמיתי	q ו- q אמיתי,	$p.q$ אמיתי
כאשר p אמיתי	q ו- q שקרי,	$p.q$ שקרי
כאשר p שקרי	q ו- q אמיתי,	$p.q$ שקרי
כאשר p שקרי	q ו- q שקרי,	$p.q$ שקרי

את הקשר בין ערכי האמת של p ו- q לבין ערך האמת של $p.q$ נוכל לבטא על-ידי הטבלה הבאה הקרויה בשם **לוח האמת** של הקוניונקציה.

("א" מציין אמת ו-"ש" מציין שקר).

p יכול לקבל שני ערכים בלבד: אמת או שקר. וכך גם q :

מספר האפשרויות לצירוף ערכי-האמת של שתי טענות p, q הוא $2^2 = 4$ = מספר הטענות



p	q	p.q
א	א	א
א	ש	ש
ש	א	ש
ש	ש	ש

ב **לוח האמת**, מופיעות כל האפשרויות של צרופים של ערכי אמת של p ו- q , ולצד כל צירוף מופיע ערך האמת המתאים של $p.q$. לכן ניתן להשתמש בלוח האמת כדי לבחון את תקפותם של טיעונים הכוללים את p , q ו- $p.q$. נראה בהמשך כיצד עושים זאת. טיעון תקף אם לא ייתכן שמסקנתו תהייה שקרית אם נתון שכל ההקדמות הן אמיתיות. ובכן, הגדרנו את "**פעולת החשבון**" הראשונה **באלגברה של ההיגיון**. פעולה זו יוצרת פסוק חדש מתוך שני פסוקים.

אולם יש גם פעולת חשבון הפועלת על מספר אחד; זוהי הפעולה המשנה את הסימן של המספר. **איזו פעולה היא זאת?**

תשובה: כאשר שמים את הסימן מינוס (-) לפני מספר רגיל, סימנו משתנה: אם הוא היה חיובי הוא הופך לשלילי ולהיפך. באלגברת ההיגיון ישנה פעולה דומה - זוהי פעולת השלילה.

השלילה

הטענה ש"אין זה נכון ש- p " או ש"שקר הדבר ש- p " או בקיצור "לא p " קרויה: **השלילה** של p , ומציינים אותה ב- " $\sim p$ ".

מהו לוח האמת של $\sim p$?

נניח ש- p היא הטענה: "חגית איחרה לשיעור" ואז $\sim p$ היא הטענה: "אין זה נכון שחגית איחרה לשיעור", או בפשטות: "חגית לא איחרה לשיעור". אם הטענה הראשונה אמיתית אזי הטענה השנייה שקרית ולהיפך. את הקשר בין ערכי האמת של p לבין ערכי האמת של $\sim p$ נוכל לבטא על-ידי הטבלה הבאה הקרויה בשם **לוח האמת** של השלילה:

p	$\sim p$
א	ש
ש	א



p יכול לקבל שני ערכים בלבד: אמת או שקר. ולכן לוח האמת נותן את כל האפשרויות של ערכי p והערכים המתאימים של $\sim p$.

כפי שהסימן מינוס (-) משנה את הסימן של מספר רגיל, כך משנה פעולת השלילה את ערך האמת.

או-כולל: הדיסיונקציה (disjunction)

את הצירוף " p או q ", כאשר ה"או" הוא כולל או לא-מוציא מציינים ב- $p \vee q$ (כאשר ה-" v " שבין האותיות קרוי בשם "טריז").

אם הטענה p היא: "דרור דיבר בזמן הבחינה", ו- q היא: "דרור העתיק בבחינה", אזי $p \vee q$ היא הטענה: "דרור דיבר בבחינה או דרור העתיק בבחינה" ובקיצור: "דרור דיבר או העתיק בבחינה". זו יכולה להיות התשובה לשאלה: "מדוע נפסלה בחינתו של דרור?".

הצירוף $p \vee q$ קרוי בשם **דיסיונקציה**.

נסה לערוך בעצמך את לוח האמת של הדיסיונקציה.

אם דרור דיבר	(p אמת)	והעתיק	(q אמת)	אז בוודאי שדרור דיבר או העתיק	($p \vee q$ אמת)
אם דרור דיבר	(p אמת)	ולא העתיק	(q שקר)	אז דרור דיבר או העתיק.	($p \vee q$ אמת)
אם דרור לא דיבר	(p שקר)	והעתיק	(q אמת)	אז דרור דיבר או העתיק.	($p \vee q$ אמת)

בכל שלושת המקרים הנ"ל הדיסיונקציה אמיתית. ומתי היא שקרית?

תשובה: כאשר דרור לא דיבר ולא העתיק. ואז בחינתו לא צריכה להיפסל.

כלומר, הדיסיונקציה אמיתית פרט למקרה שבו גם p וגם q שקריות.

כזכור, מספר האפשרויות לצירוף ערכי-האמת של שתי טענות p, q הוא $2^2 = 4$ מספר הטענות

לוח האמת של הדיסיונקציה הוא אפוא:

p	q	$p \vee q$
א	א	א
א	ש	א
ש	א	א
ש	ש	ש

ב **לוח האמת**, מופיעות כל האפשרויות של צרופים של ערכי אמת של p ו- q , ולצד כל צירוף



מופיע ערך האמת המתאים של $p \vee q$. לכן ניתן להשתמש בלוח האמת כדי לבחון את תקפותם של טיעונים הכוללים את p , q ו- $p \vee q$. נראה בהמשך כיצד עושים זאת.

נוכל כעת לבטא את **היקש הבררה** שהיצגנו בתחילת השיעור הקודם (שיעור 12) בשפת האלגברה של ההיגיון. את היקש הבררה:
או ששמעון זו הצדה או ששמעון ייפגע ממכונית;
שמעון לא זו הצדה;
לכן שמעון ייפגע ממכונית.

נבטא בצורה הבאה:

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$

הקו בא לציין שמתחתיו באה המסקנה, דהיינו - הוא בא במקום המלה "לכן". זהו טיעון בעל דפוס של היקש הבררה.

באחד השיעורים הקודמים ראינו שניתן להוכיח, בשיטת ההצבה, שדפוס טיעון אינו תקף אולם אי אפשר להוכיח בעזרתה שהוא אכן תקף - **אתם זוכרים למה?**
תשובה: כי אם לא מצאנו דוגמת הצבה שבה ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית, אין זו עדיין הוכחה; תמיד יוותרו הצבות אפשריות רבות שלא ניסינו אותן עדיין.

כעת נראה, שבאמצעות לוחות אמת, ניתן גם להוכיח שטיעון הוא תקף.
זאת ניתן לעשות בדרך הבאה:
על מנת להוכיח שדפוס הטיעון הנ"ל תקף, עורכים לוח אמת ובו טורים של ערכי האמת של p , q , $\sim p$ ו- $p \vee q$. **אם בכל מקרה שבו שתי ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית - הטיעון יהיה תקף.**

	$p \vee q$	$\sim p$	q	p
(רק הקדמה אחת אמיתית והמסקנה אמיתית)	א	ש	א	א
(רק הקדמה אחת אמיתית והמסקנה שקרית)	א	ש	ש	א
(כל ההקדמות אמיתיות והמסקנה אמיתית)	א	א	א	ש
(רק הקדמה אחת אמיתית והמסקנה שקרית)	ש	א	ש	ש
	↑	↑	↑	
	1ה	2ה	מס	

1ה, 2ה ו-מס מציינים את העמודות המתאימות להקדמה הראשונה, השנייה ולמסקנה, בהתאמה.

הטור הרביעי (תמיד נספור את הטורים מימין לשמאל) מתאים להקדמה הראשונה של

הטיעון, הטור השלישי מתאים להקדמה השנייה והטור השני - למסקנה. בלוח האמת מופיעים כל הצרופים האפשריים של ערכי אמת של ההקדמות ושל המסקנה. בכל השורות שבהן ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית. (במקרה זה יש רק שורה אחת כזאת - השורה השלישית). אין בלוח שום שורה שבה ההקדמות אמיתיות והמסקנה אינה אמיתית. מכאן שהטיעון תקף.

אם בכל מקרה שבו שתי ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית - הטיעון תקף. וזה כבר מייצג את כל ההצבות האפשריות. - **מדוע?**

תשובה: כי אנו מתעניינים רק בערכי האמת של ההצבות. וכל הצרופים האפשריים של ערכי האמת מופיעים בלוח האמת. כל הצבה תתאים לאחת מארבע השורות של לוח האמת.

למשל, ניקח את ההצבה הבאה:

p: בן גוריון היה ראש ממשלה;

q: ביאליק היה ראש ממשלה;

הצב בהיקש הבררה. לאיזו שורה מארבע השורות של לוח האמת תתאים הצבה זו?

לשורה השנייה כמובן. שורה זו מתאימה להקדמה ראשונה אמיתית ושנייה שקרית. ניקח כעת את ההצבה ההפוכה - כאשר האותיות p ו-q מחליפות תפקידים. **לאיזו שורה תתאים הצבה זו?** - לשורה השלישית. בשורה הזאת שתי ההקדמות אמיתיות וגם המסקנה אמיתית.

בכל הצבה שהיא של דפוס טיעון זה, נקבל תמיד שאם שתי ההקדמות אמיתיות, גם המסקנה אמיתית. גם אם נחפש מתחת לאדמה, לא נמצא הצבה שבה שתי ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית.

ישנה רק שורה אחת בה שתי ההקדמות אמיתיות - זוהי השורה השלישית, ובה ערך האמת בטור של q - הוא א. ובכך הוכחנו שהטיעון תקף.

הוכח בעזרת אותה שיטה שהטיעון הבא אינו תקף:
או ששמעון זו הצדה או ששמעון ייפגע מהמכונית;
שמעון זו הצדה;
לכן שמעון לא יפגע מהמכונית.

ההוכחה:

דפוס הטיעון הוא:

p v q

p

q



ערוך כעת את לוח האמת המתאים.
חשוב רגע - הרי ניתן להשתמש בלוח האמת הקודם, כאשר הפעם טורים אחרים מייצגים את ההקדמות.
אילו טורים הם אלה?

תשובה: הטורים הרביעי והראשון מייצגים את ההקדמה הראשונה והשנייה בהתאמה, ואילו הטור השני מייצג גם כאן את המסקנה.

יש כאן שתי שורות שבהן שתי ההקדמות אמיתיות. אילו שורות הן אלה?
 אלו הן השורות הראשונה והשנייה.

ובכן, האם הטיעון תקף?

תשובה: בשורה הראשונה ההקדמות אמיתיות וגם המסקנה אמיתית, אולם בשורה השנייה ההקדמות אמיתיות והמסקנה שקרית. הגדרנו **טיעון תקף** כטיעון שבו **בכל מקרה שבו שתי ההקדמות אמיתיות גם המסקנה אמיתית**. ולכן במקרה שלנו גם דפוס הטיעון, וגם הטיעון, **אינם תקפים!**

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

ערך-אמת

וו החיבור - הקוניונקציה

לוח האמת

פעולת חשבון באלגברה של ההיגיון

השלילה

או כולל - הדיסיונקציה, טריז

איך להוכיח שטיעון הוא תקף (באמצעות לוח האמת)

