

שיעור 15: האלגברה של פסוקי תנאי

בנוסף לקוניונקציה ודיסיונקציה גם **פסוק תנאי** הוא פסוק המורכב משני פסוקים. (נשתמש לחילופין במונח "פסוק" או במונח "טענה").

נתבונן בארבעת פסוקי התנאי הבאים:

- א. אם בני האדם הם ממשפחת היונקים והישראלים הם בני אדם, הרי הישראלים הם ממשפחת היונקים.
- ב. אם גבריאֵל הוא רווק, הרי גבריאֵל הוא גבר לא-נשוי.
- ג. אם נשים קרח בתנור חם, יהפוך הקרח למים.
- ד. אם נפסיד במשחק, אזי אוכל את כובעי.

כל הפסוקים הללו הם **פסוקי תנאי**, **הטוענים משהו על הקשר הקיים בין הרישא לסיפא**: בפסוק הראשון הסיפא נובע באופן **הגיוני** מתוך הרישא: הקשר בין הרישא לסיפא הוא קשר הגיוני.

בפסוק השני נובע הסיפא מהרישא מתוך **הגדרת** המונח "רווק". הקשר הוא קשר של הגדרה.

הפסוק השלישי מבטא טענת **תנאי סיבתית**; הקשר בין הסיפא לרישא הוא קשר אמפירי-סיבתי: כאשר שמים קרח בתנור חם הדבר גורם להפיכת הקרח למים; כלומר הרישא הוא הסיבה לסיפא.

בפסוק הרביעי הקשר אינו הגיוני, אינו נובע מהגדרה ואינו קשר סיבתי. הקשר נובע **מרצונו** או מהחלטתו של הדובר.

התכונה ההגיונית המשותפת לכל טענות התנאי היא שאם הרישא אמיתי והסיפא שקרי אזי פסוק התנאי הוא שקרי.

טענה א' היתה שקרית אילו: באמת כל בני האדם הם ממשפחת היונקים והישראלים הם בני אדם (רישא אמיתי), אולם הישראלים אינם ממשפחת היונקים (סיפא שקרי).

אולם זה לא ייתכן, כיוון שהטעון הבא:

בני האדם שייכים למשפחת היונקים;

הישראלים הם בני אדם;

לכן הישראלים שייכים למשפחת היונקים.

הוא היקש בעל דפוס תקף (טרנסיטיביות), ולכן לא ייתכן שהמסקנה שקרית כאשר ההקדמות אמיתיות. כלומר, טענה א' אינה יכולה להיות שקרית; היא אמיתית **בהכרח**.



טענה ב' היא אמיתית בתוקף משמעות או הגדרת המונחים המופיעים בה. משמעותו של המונח "רווק" היא "גבר לא-נשוי" ולכן הטיעון: [גבריאלי רווק, לכן גבריאלי הוא גבר לא-נשוי] אומר את אותו הדבר כמו הטיעון: [גבריאלי רווק, לכן גבריאלי רווק]. אולם דפוס הטיעון של הטיעון האחרון הוא: [p, לכן p], וזהו דפוס טיעון תקף. **מדוע?** תשובה: כיוון שאין מקרה הצבה שבו ההקדמה אמיתית והמסקנה שקרית (ל-p יש אותו ערך-אמת כמו ל-p!).

מה הקשר בין תקפות הטיעון הראשון לבין ערך האמת של טענה ב'? תשובה: כאשר הטיעון תקף הטענה אמיתית.

באשר לטענה ג', אין הכרח **הגיוני** שהטענה תהיה אמיתית. אנו יודעים, אמנם, מניסיונו שאם שמים קרח במקום הוא נמס, אולם אם נשים קרח בתנור חם והקרח לא יהפוך למים - נוכיח בכך שטענה ג' היא שקרית. עד עתה, אמנם, זה לא קרה, אולם אין הכרח **הגיוני** שזה לא יקרה. כלומר, זו טענת תנאי שניתן לגלות שהיא איננה נכונה.

דוגמאות נוספות לטענה כזאת - שאין בה הכרח הגיוני, וניתן לגלות שהיא שקרית:

1. בני האדם היו בטוחים בנכונותה של טענת התנאי הבאה: "אם ציפור היא ברבור, הרי הציפור היא לבנה", עד אשר נתגלו ברבורים שחורים באוסטרליה, ובכך נתגלתה הטענה כשקרית.

2. אנו מכירים את טענת התנאי הבאה: "מים חמים עולים למעלה". והנה, בבריכת השמש ליד אילת יש מצב הפוך: המים בשכבה העליונה קרים, בעוד המים בעומק חמים מאוד. התברר כי כתוצאה ממערכת הריכוזים של המלחים במים, נעצר התהליך הרגיל של הסעת החום והמים החמים לא עולים למעלה כפי שאפשר היה לצפות. (עובדה זו מנוצלת כיום לצרכים תעשייתיים).

גם טענה ד' אינה אמיתית בהכרח. מי שטוען אותה מבטא את החלטתו או את רצונו וייתכן בהחלט שלא יקיים את ה"הבטחה".

כיצד מבטאים טענת תנאי באלגברה של ההיגיון?

טענת תנאי "אם p אז q" מציינים כך: q כ p (יש לקרוא זאת כמו שקוראים אנגלית - משמאל לימין). סימן **הפסדה** "כ" מקשר את p עם q בפסוק התנאי. משמעותו: "p גורר q", או - "q נובע מ-p".

את לוח האמת של פסוק התנאי נערוך על-פי הכלל שאליו הגענו:

"q כ p" אמיתית במקרה שהרישא אמיתית והסיפא אמיתית. "q כ p" שקרית במקרה שהרישא אמיתית והסיפא שקרית. בכל שאר המקרים נסכים (גם אם הדבר נוגד לעתים את ההיגיון האינטואיטיבי שלנו) שפסוק התנאי אמיתי - ההסבר מסובך ולא נוכל להיכנס כאן



לפירוטו.

לוח האמת של הפרסה:

p	q	p	q
א	א	א	א
ש	ש	א	ש
א	א	ש	א
א	ש	ש	ש

נעבור כעת לפסוק תנאי שאינו נמנה עם אף אחד מן הסוגים א-ד. נתבונן בפסוק התנאי הבא:
ה. "אם זרש עברה את הבחינה, אז אני צוללת".

כאן אין קשר ממשי בין הרישא לסיפא - לא קשר הגיוני, לא קשר הגדרתי, לא קשר סיבתי וגם לא קשר של החלטה - כי אין בכוחו של הדובר להפוך את הסיפא לאמיתי. הסיפא הוא טענה שהיא באופן ברור שקרית; והואיל ובשום טענת-תנאי אמיתית לא יוכלו רישא אמיתית וסיפא שקרית לדור בכפיפה אחת, הרי משמעות טענה כזאת היא **הכחשת הרישא**.
הבא דוגמאות נוספות לפסוק תנאי מסוג זה.

דוגמאות:

א. לאיזה סוג של פסוק תנאי שייך כל אחד מהפסוקים הבאים?

1. "אם אשכחך ירושלים תשכח ימיני, תדבק לשוני לחיכי אם לא אזכרכי".

תשובה: יש כאן שני פסוקי תנאי. בשניהם הקשר בין הרישא והסיפא אינו קשר הגיוני, הגדרתי או סיבתי. האם זה קשר החלטתי? אין בכוחו של הדובר להגשים את הסיפא. אולם הסיפא הוא מאורע אפשרי, כלומר הסיפא יכול להיות אמיתי - לכן גם אין כאן הכחשת הרישא; הדובר יכול לשכוח את ירושלים, למרות רצונו לזכרה. אולם **משאלתו** היא שבמקרה כזה יקבל עונש כבד על כך - העונש המתואר בסיפא. לכן, על-ידי פסוק תנאי כזה, הדובר מביע רצון עז שהרישא לא יתגשם, אולם הוא אינו מבטל את האפשרות שהוא עשוי להתגשם. הפסוק הוא אפוא מסוג ד.

2. "אם תלך ישר, תגיע לתחנת האוטובוס".

תשובה: קשר סיבתי.

3. "אם אין קמח, אין תורה".

(כ"ל)



4. "אם תכניס את האצבע למים הרותחים - תיכווה".
(כני"ל)

5. "אם לא נפסיד במשחק, אז או שננצח או שהמשחק יסתיים בתיקו".
תשובה: קשר הגדרתי.

6. "אם נפסיד, אז נפסיד".
תשובה: קשר הגיוני.

מצא דוגמאות נוספות לכל חמשת סוגי פסוקי התנאי.

ב. אם הביטוי של הטענה הבאה:

"או שיהיידע יגיש תלונה או שאם זרובבלה תחקור הרי שיקותיאל יפוטרי"

הוא $p \vee (q \supset r)$, מה יהיה הביטוי הסמלי של הטענה הבאה:

"אם אין זה המקרה שיהיידע יגיש תלונה, הרי שזרובבלה תחקור ויקותיאל לא

יפוטרי".

תשובה: $\sim p \supset (q \supset \sim r)$

ג. ערוך את לוח האמת של הביטויים: $p \supset (q \supset r)$ ו- $(p \supset q) \supset r$

מספר האפשרויות לצירוף ערכי-האמת של שלש טענות p, q, r הוא $2^3 = 8$ מספר הטענות: 2:

p	q	r	$p \supset q$	$q \supset r$	$p \supset (q \supset r)$	$(p \supset q) \supset r$
א	א	א	א	א	א	א
א	א	ש	א	ש	ש	ש
א	ש	א	ש	א	א	א
א	ש	ש	ש	א	א	א
ש	א	א	א	א	א	א
ש	א	ש	א	ש	ש	ש
ש	ש	א	א	א	א	א
ש	ש	ש	א	א	א	א



מה אפשר להסיק מתוך כך שלוחות האמת של שני הביטויים שונים זה מזה?

המסקנה היא ששני הביטויים אומרים דברים שונים. כי אם הם היו אומרים אותו הדבר - הם היו צריכים לקבל אותם ערכי-אמת בכל שורה.

אנו רואים, אפוא, שהכלל $(a+b)+c = a+(b+c)$, המתקיים לגבי פעולת החיבור, אינו מתקיים לגבי "פעולת" הפרסה.

למשל, שתי הטענות הבאות אינן אומרות אותו הדבר:

"אם זה נכון שאם תלמד את החומר אז תדע את החומר, אזי תצליח בבחינה"

"אם תלמד את החומר, אזי אם תדע את החומר אז תצליח בבחינה"

אם את/ה מתקשה להשתכנע ששני פסוקי התנאי המורכבים הנ"ל אינם אומרים אותו הדבר, נביא דוגמה נוספת:

מונית, טנדר ואוטובוס נוסעים בכביש אשר גשר נמוך חוצה אותו. תקרת האוטובוס גבוהה יותר מתקרת הטנדר, ותקרת הטנדר גבוהה יותר מתקרת המונית. המונית אינה עוברת מתחת לגשר ואז, כמובן, גם הטנדר והאוטובוס לא יעברו. נתבונן עתה בשני פסוקי התנאי המורכבים הבאים:

א. "אם זה נכון שאם המונית תעבור אז הטנדר יעבור, אזי - האוטובוס יעבור"

ב. "אם המונית תעבור, אזי - אם הטנדר יעבור אז האוטובוס יעבור".

p: מונית עוברת.

q: טנדר עובר.

r: אוטובוס עובר.

הביטוי של פסוק א הוא: r כ $(q$ כ $p)$ והוא **שקרי**, כיוון שהרישא אמיתי (**מדוע?**) והסיפא שקרי.

הביטוי של פסוק ב הוא: $(r$ כ $q)$ כ p והוא **אמיתי** כיוון שהרישא שקרי והסיפא אמיתי (ראה לוח האמת של הפרסה).

לכן לא ייתכן ששני הפסוקים יאמרו אותו הדבר.



פסוקי תנאי מהצורה "A רק אם B"

שאלה: כיצד לדעתך יש לייצג בצורה סמלית את הפסוק: "התלמיד משתתף בבחינה

רק אם שילם שכר-לימוד?"

תשובה: אם נשתמש בסימונים הבאים:

p: התלמיד משתתף במבחן.

q: התלמיד שילם שכר לימוד.

הביטוי של הפסוק הוא: $q \supset p$.

ואמנם, משמעות הפסוק היא: "אם התלמיד משתתף במבחן, פירוש הדבר הוא ששילם

שכר-לימוד". אנו אומרים ש-q הוא תנאי הכרחי ל-p.

או: אם p מתקיים אזי בהכרח q מתקיים. אולם ההיפך אינו מתקיים בהכרח: אין זה בהכרח

נכון שאם q מתקיים, גם p מתקיים (ייתכן שהתלמיד שילם שכר-לימוד ולא בא למבחן!).

דוגמה נוספת:

את הפסוק "חמצן הוא תנאי הכרחי לחיים", ובנוסף אחר: "אם אין חמצן אין חיים", או

"חיים מתקיימים רק אם יש חמצן"

ניתן להציג כך: $q \supset p$. **מהו p ומהו q? בדוק: האם ייתכן חמצן ללא חיים?**

תשובה: אם נשתמש בסימונים הבאים:

p: חיים מתקיימים.

q: יש חמצן.

מושגים והגדרות שהיכרנו בשיעור הזה:

תנאי הכרחי

פסוק תנאי

פרסה



©

מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה

